

# Derivación de las fórmulas de sombras de árboles empleadas en el programa ShadeMotion

Francisco Quesada Chaverri



Serie técnica. Manual técnico; no. 151

# Derivación de las fórmulas de sombras de árboles empleadas en el programa ShadeMotion

Francisco Quesada Chaverri

Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza  
Turrialba, Costa Rica,  
2021



CATIE no asume la responsabilidad por las opiniones y afirmaciones expresadas por los autores en las páginas de este documento. Las ideas de los autores no reflejan necesariamente el punto de vista de la institución. Se autoriza la reproducción parcial o total de la información contenida en este documento, siempre y cuando se cite la fuente.

© CATIE - Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza, 2021

ISBN 978-9977-57-746-3

633.7434

Q5

Quesada Chaverri, Francisco

Derivación de las fórmulas de sombras de árboles empleadas en el programa ShadeMotion / Francisco Quesada Chaverri. – 1ª ed. – Turrialba, Costa Rica : CATIE, 2021.

35 p. : il. – (Serie técnica. Manual técnico / CATIE ; no. 151)

ISBN 978-9977-57-746-3

Disponible en: <http://hdl.handle.net/11554/11358>

1. Sombra 2. Árboles de sombra 3. Modelos matemáticos 4. ShadeMotion  
I. CATIE II. Título III. Serie.

#### Citación sugerida:

Quesada Chaverri, F. 2021. Derivación de las fórmulas de sombras de árboles empleadas en el programa ShadeMotion (en línea). Turrialba, Costa Rica, CATIE. 25 p. (Serie técnica. Manual técnico / CATIE, no. 151).  
Disponible en: <http://hdl.handle.net/11554/11358>

#### Créditos

Autor: Francisco Quesada

Revisores técnicos: Eduardo Piza, Moisés Solano

Diagramación: Silvia Francis Salazar, Tecnología de Información y

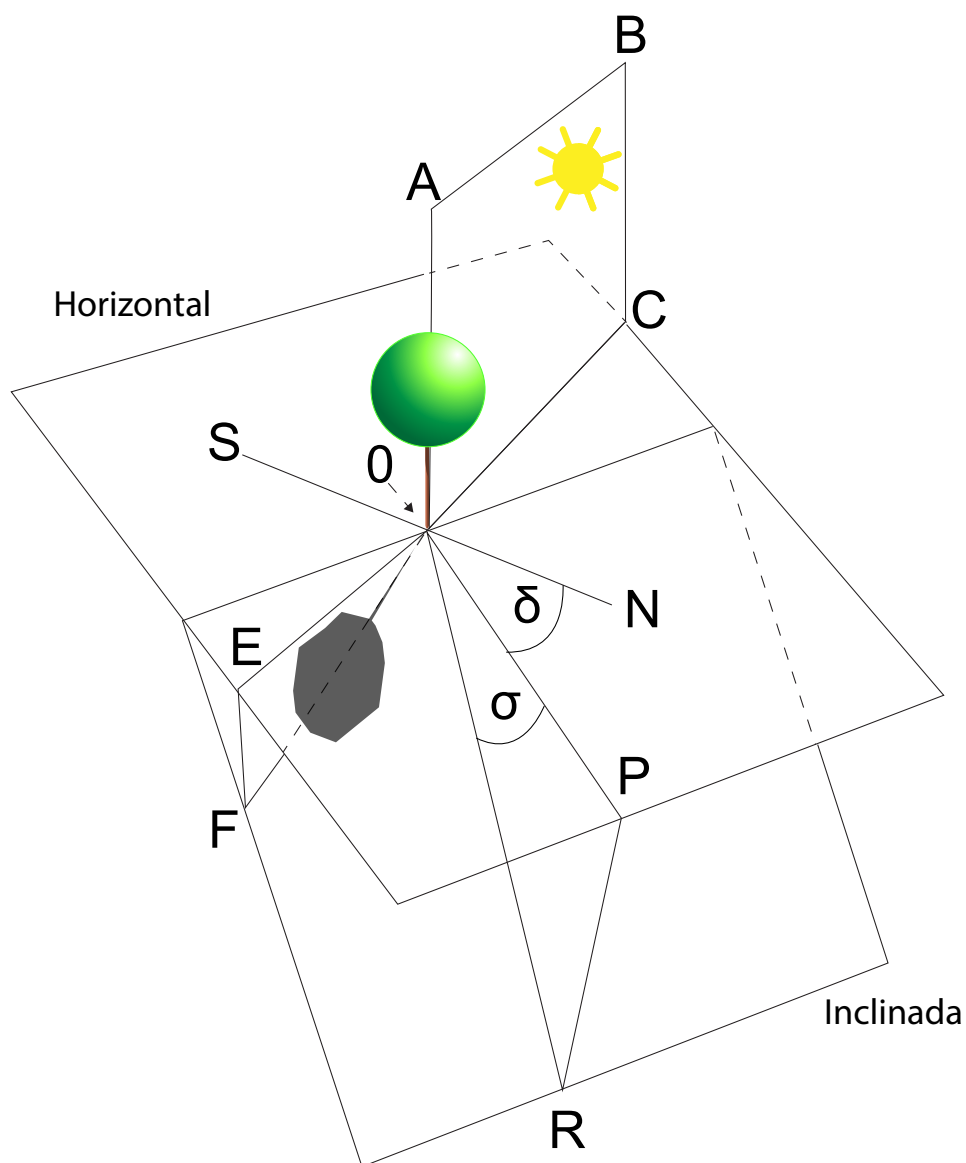
Comunicación, CATIE

# Contenido

<b>1. Introducción.....</b>	<b>6</b>
1.1. La sombra de un cuerpo solido y opaco limitado por una supercie de segundo grado es una region del plano cuyo contorno es una curva de segundo grado.....	7
1.2. La posicion del Sol en coordenadas horizontales .....	7
1.3. Una regla util.....	8
1.3.1. La proyección de medidas horizontales y verticales por rayos paralelos .....	8
1.4. Un sistema cartesiano universal de referencia SRU .....	9
1.5. Acuerdo sobre el nombre de los parametros que describen las caractersticas de los arboles .....	11
1.6. La sombra de una copa elipsoidal sobre un plano horizontal.....	12
1.6.1. La sombra en SRA.....	12
1.6.2. Paso de SRA a SRB .....	17
1.6.3. Paso de SRB a SRU .....	17
1.7. La sombra de las copas no elipsoidales sobre un plano horizontal .....	19
1.7.1. Copa cilndrica .....	19
1.7.2. Copa conica .....	20
<b>2. Formulas de las sombras en un plano horizontal. ....</b>	<b>22</b>
2.1. Como se usan las formulas de las sombras en el software Shade-Motion.....	22
2.2. Elevar el plano de proyeccion de las sombras y cambiar la orientación de los ejes coordenados .....	22
<b>3. Lista de las formulas de las sombras en un plano horizontal. ....</b>	<b>23</b>
3.1. Copas esfericas .....	23
3.2. Copas elipsoidales.....	23
3.3. Copas semi-elipsoidales.....	24
3.4. Copas conicas .....	24
3.5. Copas conicas invertidas.....	25
3.6. Copas cilndricas .....	25
3.7. Copas tipo sombrilla .....	26
<b>4. Las sombras en terrenos inclinados. ....</b>	<b>27</b>
4.1. Copas esfericas .....	30
4.2. Copas elipsoidales.....	30
4.3. Copas semi-elipsoidales.....	31
4.4. Copas conicas .....	31
4.5. Copas conicas invertidas.....	32
4.6. Copas cilndricas .....	32
4.7. Copas tipo sombrilla .....	32
<b>5.</b>	
<b>Transformaciones algebraicas empleadas y su significado geometrico.....</b>	<b>33</b>
<b>Agradecimientos .....</b>	<b>35</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>35</b>

### Resumen

En este artículo se expone con detalle el proceso mediante el cual se deducen las fórmulas de las sombras de árboles utilizadas en el software ShadeMotion. Se incluye la lista de fórmulas de las sombras para todos los tipos de copa empleados en el programa, tanto para terrenos horizontales como para terrenos inclinados.



# Introducción

La construcción de las fórmulas de las sombras de los árboles utilizadas en ShadeMotion es un proceso en el que intervienen elementos pertenecientes a cinco áreas de la matemática: 1) álgebra general, 2) geometría descriptiva tridimensional, 3) geometría analítica del plano cartesiano, 4) trigonometría plana y 5) cálculo diferencial de una variable. El desarrollo presentado en este artículo sigue un camino más directo y simplificado que el seguido en la primera versión de ShadeMotion (Quesada 1987), especialmente en el tratamiento de las sombras en planos inclinados. Las fórmulas o expresiones analíticas de las sombras definen regiones convexas del plano limitadas por curvas y segmentos de recta. Ya que la sombra de una copa está constituida no solo por el contorno de estas regiones, sino también por su interior, las expresiones analíticas de las sombras se deben expresar mediante desigualdades algebraicas. Debido a que el desarrollo de las fórmulas ha sido concebido para la creación de un modelo computacional que permita, como uno de sus principales objetivos, recrear mapas de sombras en la pantalla de la computadora, empleamos fórmulas aptas para la verificación de puntos, más que para generar puntos de la frontera o del interior de la sombra. Este requisito justifica por qué en vez de optar por las versiones paramétricas de las curvas del contorno optamos por las fórmulas cartesianas, también conocidas como ecuaciones implícitas.

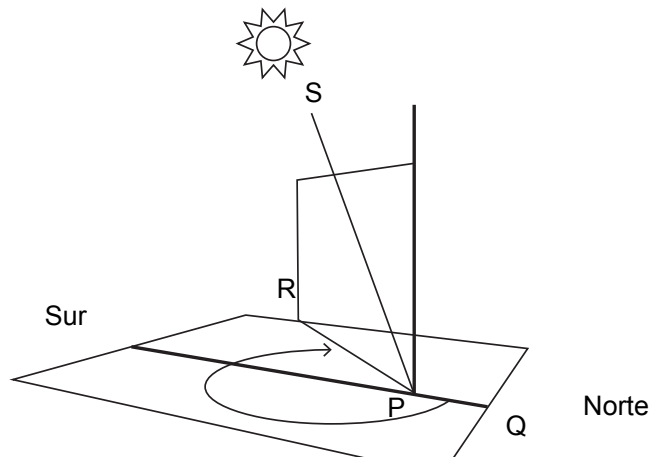
Un detalle que merece la pena mencionar, acerca del lenguaje empleado en este estudio, se relaciona con el uso de dos conceptos que no pertenecen a la geometría pura propiamente, pero que en el desarrollo de las fórmulas juegan un papel primordial. Nos referimos a los términos de *horizontalidad* y *verticalidad*. Para los seres humanos, quienes habitamos en una pequeña región del planeta, la cual percibimos como plana (un pequeño vecindario de un punto del plano tangente a la esfera terrestre, diría un geómetra) tanto lo horizontal como lo vertical son nociones que han surgido directamente de nuestra experiencia con la gravedad terrestre. Allá afuera, en el espacio interestelar y en ausencia de gravedad, no tiene ningún sentido hablar de planos horizontales o de rectas verticales. Pero, aquí en la Tierra, donde experimentamos que los árboles crecen “hacia arriba” y que el agua se empoza en las superficies “planas” (con frecuencia preferimos decir “terreno plano” en lugar de “terreno horizontal”), los conceptos de horizontalidad y verticalidad están estrechamente ligados a nuestra experiencia y lenguaje cotidiano, así como a la Ingeniería, la Física Aplicada y las Ciencias de la Tierra. No es casual entonces, que en el presente estudio se haya escogido las llamadas *coordenadas horizontales* para determinar la posición del Sol en el cielo, coordenadas que se ajustan muy adecuadamente al modo como percibimos el Sol desde la localidad en que habitamos. Respecto a estas coordenadas, es natural decir, por ejemplo, que el Sol se encuentra con una elevación de 30 grados y a 55 grados norte en sentido horario. A esa misma hora, en otro lugar, esas coordenadas posiblemente serían otras.

## 1.1. La sombra de un cuerpo sólido y opaco limitado por una superficie de segundo grado es una región del plano cuyo contorno es una curva de segundo grado

Las sombras que proyectan los cuerpos tridimensionales opacos sobre una superficie plana son el resultado del bloqueo que estos cuerpos ejercen al paso de los rayos solares. Debido a la gran distancia que separa el Sol de nuestro planeta, podemos suponer, con un alto grado de exactitud, que los rayos solares llegan a la Tierra formando un haz de rayos paralelos. El hecho que la sombra de un cuerpo elipsoidal sea una elipse es algo que parece no contradecir nuestra experiencia o incluso nuestra intuición. Una breve explicación matemática de este hecho es la siguiente: los elipsoides son superficies de segundo grado cuyas secciones transversales son curvas de segundo grado conocidas como elipses (basta fijar una de las tres variables de la ecuación cartesiana de un elipsoide para comprobar que el resultado es la ecuación de una elipse). Por otra parte, las proyecciones por rayos paralelos de un cuerpo en el espacio se pueden expresar matemáticamente por medio de una transformación matricial sobre las variables espaciales y este tipo de transformación no aumenta el grado de las expresiones algebraicas a las que se aplica, pues se reduce a multiplicar las variables por números. Resulta entonces que la proyección de una superficie de segundo grado sobre una superficie plana tiene como contorno una curva cerrada de segundo grado, y es un hecho bien conocido que las únicas curvas algebraicas cerradas de segundo grado que existen son las elipses. Aceptaremos, por tanto, sin mayor discusión, que el contorno de la sombra de un elipsoide está dado por una elipse.

## 1.2. La posición del Sol en coordenadas horizontales

En este estudio se usarán las llamadas coordenadas horizontales (elevación y azimut) para determinar la posición del Sol en el cielo. La elevación, la cual denotaremos por *elev* es el ángulo que forma un rayo de Sol con el plano horizontal del suelo. El azimut, que denotaremos *azim*, es el ángulo que muestra la dirección geográfica en que vemos el Sol. Este ángulo se mide respecto al norte en sentido horario. Por ejemplo, cuando los rayos inciden desde el este, el azimut tiene un valor de 90 °. La Figura 1 muestra ambos ángulos:  $\angle SPR$  es el ángulo de elevación y  $\angle QPR$  (marcado por la línea curva) es el azimut.



**Figura 1.** Determinamos la elevación y el azimut del Sol mediante las siguientes fórmulas:

$$hor = 15(hora - 12)$$

$$decl = 23,45 \text{sen}((360/365)(d + 284))$$

$$elev = \text{sen}^{-1}[\cos(lat) \cos(decl) \cos(hor) + \text{sen}(lat) \text{sen}(decl)]$$

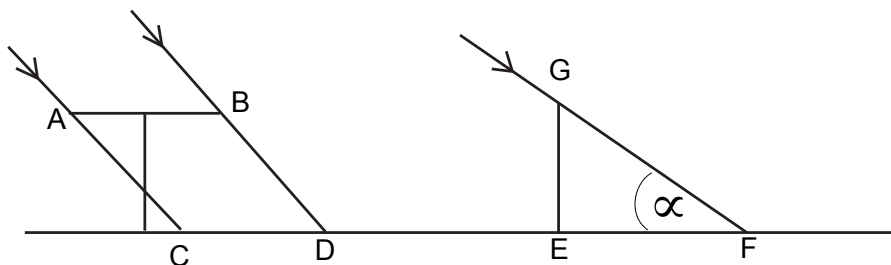
$$azim = \text{cos}^{-1}\left[\frac{\cos(lat) \text{sen}(decl) - \text{sen}(lat) \cos(decl) \cos(hor)}{\cos(elev)}\right]$$

en donde *lat* designa la latitud geográfica, *decl* la declinación del Sol, *hor* la hora del día, *elev* la elevación y *azim* el azimut solar. La declinación solar es el ángulo que forma la línea Sol-Tierra y el plano del ecuador celeste (proyección del ecuador terrestre).

## 1.3. Una regla útil

### 1.3.1. La proyección de medidas horizontales y verticales por rayos paralelos

Resulta de utilidad tener presente la regla, de la que haremos uso en repetidas ocasiones en la derivación de las expresiones matemáticas de las sombras, sobre la forma en cómo se proyecta sobre un plano horizontal la sombra de un segmento de línea recta, por ejemplo, una vara delgada de longitud *L*. En la Figura 2 es fácil comprobar las dos afirmaciones siguientes:



**Figura 2**



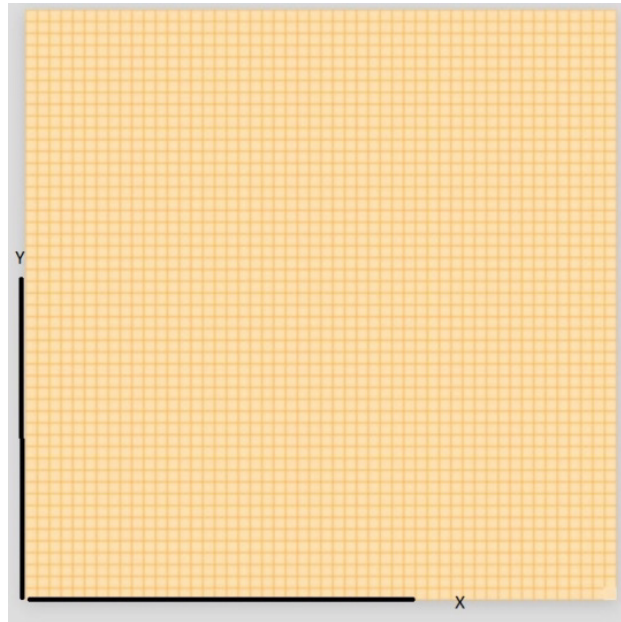
1. Si una vara de longitud  $L$  se encuentra en posición horizontal, a cierta altura del suelo (paralela al suelo), entonces la longitud  $L'$  de la sombra que proyecta la vara coincide con la longitud de la vara misma, es decir  $L' = L$ . Además, tanto la vara como su sombra apuntan en la misma dirección cardinal.
2. Si la vara tiene posición vertical (perpendicular al suelo) la longitud de su sombra  $L'$  se transforma en función del valor del ángulo de elevación del Sol según la fórmula

$L' = L / \tan(\text{elev})$ , la cual, por comodidad en la escritura de las futuras fórmulas (para evitar los denominadores), preferimos escribir en la forma  $L' = L \cotan(\text{elev})$ . Se observa que entre menor es la elevación (temprano por la mañana o cerca de la puesta del Sol) más larga es la sombra de un poste vertical, algo que habremos experimentado en muchas ocasiones. Contrariamente, cuando la elevación tiende a  $90^\circ$  el valor de  $L'$  tiende a cero y la sombra tiende a reducirse a un punto.

La Figura 2(a) muestra que  $|AB| = |CD|$  por ser lados opuestos de un romboide. El triángulo GEF de la Figura 2(b) muestra que  $|GE| / |EF| = \tan(\alpha)$ , de donde se deduce por simple despeje que  $|EF| = |GE|\cotan(\alpha)$ . Como consecuencia del primer punto se puede concluir que *la sombra de toda figura plana horizontal sobre un plano (suelo) horizontal tiene idéntica forma y dimensiones que la figura de la cual es proyección*. Aplicaremos esto en el caso de los discos horizontales que limitan a varios tipos de copas, por ejemplo, las tapas de una copa cilíndrica circular o la base de una copa semielipsoidal o cónica. El segundo punto explica por qué la sombra de las copas se alarga o se contrae precisamente en la dirección vertical. Ambos puntos nos servirán para justificar por qué las sombras de las copas de nuestros ejemplos tienen la misma anchura que sus copas, pero su altura suele variar con la hora del día.

## 1.4. Un sistema cartesiano universal de referencia SRU

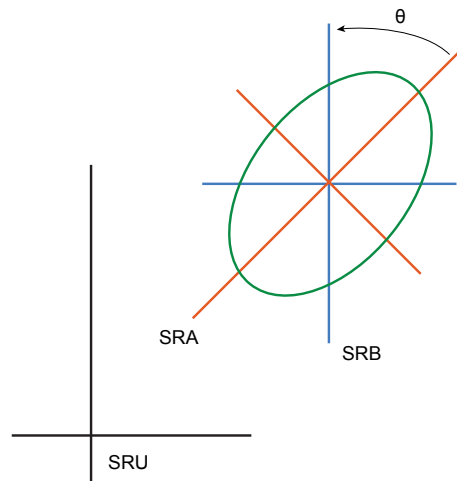
En ShadeMotion la parcela se representa mediante un área cuadrada o rectangular dividida en celdillas. En la esquina inferior izquierda de este cuadrículado se coloca el origen de coordenadas de un sistema cartesiano cuyos semiejes positivos corren a lo largo de los extremos inferior e izquierdo de la parcela, el eje X, como es usual, a lo largo del lado horizontal y el eje Y a lo largo del vertical, quedando el cuadrículado de la parcela en el primer cuadrante del sistema cartesiano, como lo muestra la Figura 3.



**Figura 3** (cuadrículado del terreno en amarillo)

Las expresiones analíticas de las sombras de todos los árboles deben expresarse respecto a este sistema universal de coordenadas llamado SRU.

Para llevar las fórmulas de las sombras al sistema SRU, a cada sombra se le asignan dos sistemas cartesianos locales denominados SRA y SRB, cuyo significado es el siguiente:



**Figura 4**

- **SRA.** Tiene el origen de coordenadas en el centro de la sombra o en la base de esta (caso de no tener centro), pero siempre sobre el eje de simetría que es continuación de la sombra del tronco.
- **SRB.** Tiene el origen en el mismo punto que SRA con sus ejes girados hasta alinearse paralelamente a los lados de la parcela y por tanto paralelos a los ejes de SRU.

Se pasa del sistema SRA al sistema SRB aplicando una rotación de los ejes coordenados de SRA y se pasa de SRB al sistema universal SRU mediante una traslación de los ejes coordenados de SRB.

SRA → SRB → SRU. La Figura 4 muestra los tres sistemas de coordenadas.

## I.5. Acuerdo sobre el nombre de los parámetros que describen las características de los árboles

En este estudio se consideran los siguientes tipos de copas de árboles: elipsoides, semielipsoides (esos dos incluyen a las esferas y semiesferas), conos, conos invertidos, cilindros circulares rectos y sombrillas. Los parámetros que determinan las dimensiones de la copa y del árbol son los siguientes:

- Ancho de la copa
- Altura de la copa
- Altura del tronco
- Diámetro del tronco a la altura del pecho (abreviado DAP)

En ShadeMotion no se toma en cuenta la sombra proyectada por el tronco, por lo que el DAP no se utiliza en el cálculo de las sombras, pero lo utilizaremos para llevar el control del crecimiento de los árboles. Los nombres de los parámetros que utilizamos en las fórmulas de las sombras son:

1. H es la altura de la copa y h es la mitad de dicha altura:  $h = H/2$
2. A es el ancho de la copa y a es la mitad de dicho ancho:  $a = A/2$
3. T es la altura del tronco: la distancia del suelo al punto donde comienza la copa del árbol

Las letras mayúsculas se refieren siempre a las medidas que observa una persona que se encuentra en el campo frente al árbol. En la Figura 5(a), H denota la altura de una copa elipsoidal y en la Figura 5(b) esa misma letra denota la altura de una copa semielipsoidal, pues en ambos casos H es la altura de la copa observada en el campo.

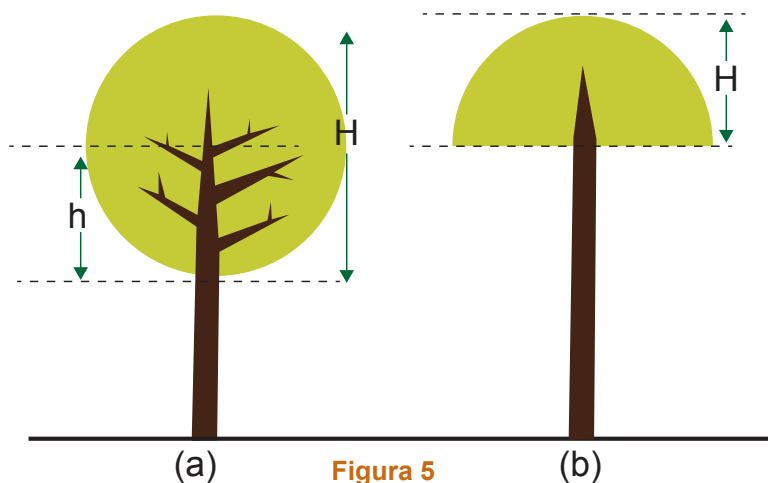


Figura 5

## 1.6. La sombra de una copa elipsoidal sobre un plano horizontal

La deducción de la fórmula matemática de la sombra de una copa elipsoidal es importante porque este cálculo se aplica también a las copas semielipsoidales, esféricas, semiesféricas y sombrillas. Primero, deduciremos la ecuación de la elipse que representa el contorno de la sombra de una copa elipsoidal en el sistema natural SRA. Una vez obtenida esa fórmula, la trasladaremos a SRB y luego a SRU. De acuerdo con el convenio de nomenclatura establecido, llamaremos a, b y h a los tres semiejes del elipsoide, en donde h denota al semieje vertical y los semiejes a y b son horizontales y de igual tamaño, pues se trata de elipsoides cuyas secciones transversales paralelas al suelo son círculos. La ecuación de este tipo de elipsoide respecto a un sistema cartesiano con origen en el centro del elipsoide y con el semieje vertical en la dirección del eje z viene dada por la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1 \quad (1)$$

Para expresar la ecuación de la sombra elíptica proyectada por el elipsoide emplearemos un sistema de coordenadas ubicado en el plano, con ejes que denotaremos también con las letras X, Y. Estaríamos tratando con dos sistemas de coordenadas, uno espacial con ejes X, Y, Z y otro plano con ejes X, Y. Como veremos, no hay peligro de confusión entre ambos sistemas.

### 1.6.1. La sombra en SRA

Como demostraremos, el elipsoide proyecta una sombra elíptica cuya fórmula respecto a SRA es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2 \cotan^2(elev) + a^2} \leq 1 \quad (2)$$

El denominador  $a^2$  del primer término de esta expresión nos revela que el ancho de la copa es el mismo que el de su sombra, como lo estipula el principio que mencionamos en la sección 1.3. El denominador del segundo término, el cual representa el otro semieje de la elipse de la sombra, requiere alguna explicación y la obtendremos del desarrollo que sigue, pero antes de hacerlo es interesante que observemos que la fórmula (2) parece comportarse en la manera esperada. Observemos que, si el ángulo de elevación  $elev$  es de 90 grados, la inecuación de la sombra se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1$$

es decir, se convierte en un disco circular de radio a. Por otra parte, si el ángulo  $elev$  tiende a 0, el factor del denominador  $\cotan(elev)$  tiende a infinito, lo cual obliga a la variable y del numerador a tomar valores cada vez mayores para compensar. Esto significa que la sombra se alarga cada vez más en la dirección del eje Y, fenómeno al que la experiencia nos tiene acostumbrados.

Para calcular la longitud del semieje de la sombra elíptica, en la dirección del eje Y del sistema SRA del suelo, consideraremos —como hemos dicho— dos sistemas de coordenadas separados, uno espacial con origen en el centro del elipsoide y uno plano ubicado en el centro de la sombra, como se muestra en la Figura 6.

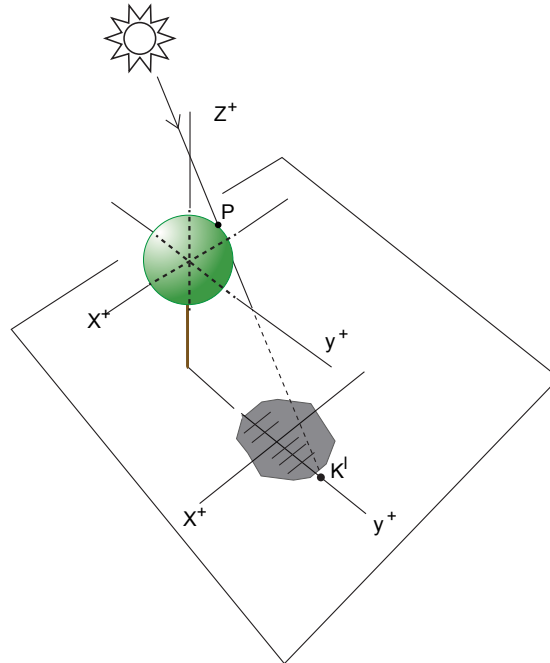


Figura 6

También, consideraremos un plano vertical paralelo a los rayos solares que contiene al tronco del árbol y parte del elipsoide en dos mitades de igual tamaño. La intersección de dicho plano vertical con la copa elipsoidal resulta en una sección transversal elíptica de tamaño máximo,<sup>1</sup> cuya ecuación en el sistema de coordenadas centrado en el elipsoide es:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

la cual vamos a escribir despejando la variable  $z$ :

$$z = h \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)} = \frac{h}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \quad (3)$$

donde  $a$  es la mitad del ancho de la copa y  $h$  la mitad de su altura.

<sup>1</sup> Cualquier otro plano vertical que no contenga el tronco y que corte la copa lo haría en una elipse de menor tamaño.

Un rayo solar incidente que toca tangencialmente la copa en un punto P de la sección transversal elíptica (en consecuencia también del elipsoide) interseca el eje Y del sistema de coordenadas del elipsoide a una distancia k del origen O y aterriza sobre el eje Y del sistema SRA de la sombra a una distancia k' del origen O' de dicho sistema, como lo muestra la Figura 7 (nótese que en esta figura, el eje X, tanto del sistema del elipsoide como el de la sombra, serían perpendiculares a la hoja de papel).

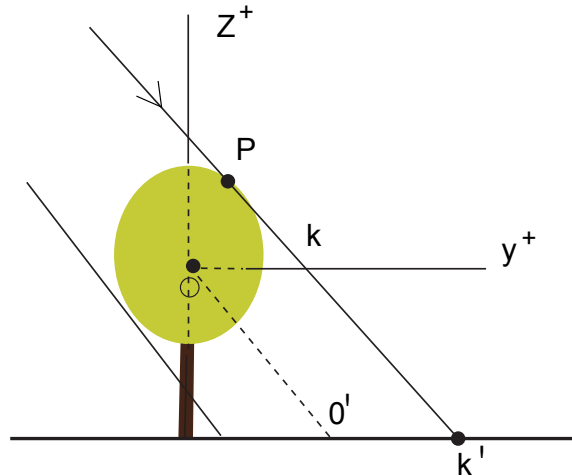


Figura 7

Si examinamos la Figura 7 podemos notar dos cosas: 1)  $k'$  es la longitud del semieje Y de la sombra elíptica y 2)  $k' = k$  pues ambas cantidades representan la longitud de lados opuestos de un romboide. Por lo tanto, si calculamos  $k$  habremos calculado  $k'$ , el semieje de la sombra que aún desconocemos y cuyo valor  $h^2 \cotan^2(\text{elev}) + a^2$  hemos anticipado —sin demostrar— en la ecuación (2) al comienzo de la discusión. Ahora, demostraremos que este valor es el correcto.

El camino para calcular el valor  $k$  del semieje consiste en calcular primero la ecuación del rayo tangente en P y una vez obtenida dicha ecuación, sustituir el valor de la ordenada  $z=0$  en el punto  $(k, 0)$  para poder despejar el valor de  $k$ .

**Cálculo de la ecuación del rayo incidente.** Podemos calcular la ecuación del rayo si obtenemos su pendiente y las coordenadas de un punto. El punto deberá ser P (no hay otro disponible) y la pendiente la calcularemos en términos del ángulo de elevación. En geometría analítica la pendiente de una recta se mide a partir del eje  $X^+$  (rayo horizontal derecho) en sentido antihorario. Si denotamos  $\beta$  al ángulo  $\angle Y^+kP$  de la pendiente del rayo incidente, tendríamos que  $\beta = 180 - \text{elev}$ , y la pendiente del rayo sería igual a  $\tan(\beta) = \tan(180 - \text{elev}) = -\tan(\text{elev})$ .

Dicha pendiente debe coincidir con el valor de la derivada de  $z$  en P:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \quad (4)$$

de donde se obtiene la relación:

$$-\frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = -\tan(\text{elev}) \quad (5)$$

Resolveremos esta ecuación en la variable “y” para obtener la coordenada  $y_0$  del punto P( $y_0, z_0$ ).

Este es un cálculo con algunas manipulaciones de álgebra elemental del cual mostraremos los principales pasos.

Pasando el denominador de (5) al lado derecho, elevando ambos miembros al cuadrado e intercambiando los lados de la ecuación se obtiene:

$$a^2(a^2 - y^2) \tan^2(\text{elev}) = h^2 y^2 \quad (6)$$

Reordenando y despejando  $y^2$  tenemos:

$$y^2 = \frac{a^4 \tan^2(\text{elev})}{a^2 \tan^2(\text{elev}) + h^2} \quad (7)$$

Multiplicando el numerador y denominador de esta fracción por  $\cotan^2(\text{elev})$ , extrayendo la raíz cuadrada y llamando  $\mu = a^2 + h^2 \tan^2(\text{elev})$  para reducir el tamaño de la expresión se obtiene:

$$y_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + h^2 \cotan^2(\text{elev})}} = \frac{a^2}{\sqrt{\mu}} \quad (8)$$

Este es el valor  $y_0$  del punto P que andamos buscando.

Ahora queremos escribir la ecuación del rayo incidente. Para ello, necesitamos 1) la pendiente del rayo, la cual como vimos es igual a  $-\tan(\text{elev})$  y 2) las coordenadas de un punto, en este caso el punto P, del cual ya tenemos la coordenada  $y_0$ . Puesto que el punto P( $y_0, z_0$ ) satisface la ecuación de la sección transversal elíptica, despejaremos  $z_0$  de la ecuación (3):

$$z_0 = \frac{h}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \quad (9)$$

El siguiente paso consiste en reemplazar la expresión (8) para  $y_0$  dentro de la raíz de la expresión (9), de donde obtendríamos el valor de  $z_0$  y completaríamos el punto ( $y_0, z_0$ ). Esto se reduce a manipulaciones algebraicas básicas (sacar el común denominador de los términos dentro de la raíz y limpiar un poco), después de lo cual se obtiene:

$$z_0 = \frac{h^2 \cotan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}}$$

y se han obtenido las coordenadas del punto P:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{a^2}{\sqrt{\mu}} \\ z_0 = \frac{h^2 \cotan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} \end{cases} \quad (10)$$

La ecuación del rayo sería entonces  $z = -\tan(\text{elev}) y + B$ , donde aún debemos calcular B. Colocaremos los valores de  $(y_0, z_0)$  en esta ecuación y despejaremos B:

$$B = \frac{h^2 \cotan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} + \frac{a^2 \tan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} \quad (11)$$

y la ecuación del rayo es finalmente:

$$z = -\tan(\text{elev}) y + \frac{h^2 \cotan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} + \frac{a^2 \tan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} \quad (12)$$

El rayo solar incidente aterriza en el punto  $(k', 0)$  pero según se estableció anteriormente  $k = k'$ , lo que significa que el punto  $(k, 0)$  pertenece al rayo incidente y por tanto satisface su ecuación. Reemplazando estos valores en la ecuación (12) del rayo:

$$0 = -\tan(\text{elev}) k + \frac{h^2 \cotan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} + \frac{a^2 \tan(\text{elev})}{\sqrt{\mu}} \quad (13)$$

y resolviendo para k se obtiene:

$$k = \frac{h^2 \cotan(\text{elev})}{\tan(\text{elev}) \sqrt{\mu}} + \frac{a^2 \tan(\text{elev})}{\tan(\text{elev}) \sqrt{\mu}} \quad (14)$$

que se reduce a

$$k = \frac{h^2 \cotan^2(\text{elev}) + a^2}{\sqrt{\mu}}$$

Es decir,

$$k = \frac{\mu}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\mu} \quad (15)$$

y recuperando el significado de  $\mu$ :

$$k = \sqrt{h^2 \cotan^2(\text{elev}) + a^2} \quad (16)$$

Hemos encontrado la ecuación de la elipse que representa el contorno de la sombra:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$



que reemplazando  $k$  por el valor dado por (16) se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2 \cotan^2(elev) + a^2} = 1 \quad (17)$$

que coincide con la ecuación (2), tal y como se quería demostrar.

### 1.6.2. Paso de SRA a SRB

Se pasa de SRA a SRB mediante una rotación de ejes coordenados por un ángulo  $\theta = \text{azim} + 180$ . El ángulo *azim*, que representa el azimut solar, conecta el sistema SRB con la posición cardinal del Sol. El término 180 obedece al hecho siguiente: visto desde la posición del árbol, la sombra se encuentra siempre en el lado opuesto al Sol, lo que corresponde a una medida angular de 180 grados entre ambos objetos. Las rotaciones alrededor del origen en el plano (Golovina 1974) se pueden expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para un ángulo  $\theta$  positivo esta matriz aplica una rotación de los ejes coordenados en sentido anti-horario. Aplicando esta matriz a las variables de la ecuación (17), obtenemos la ecuación en SRB de la elipse que delimita la sombra de una copa elipsoidal:

$$\frac{(x \cos(\text{azim} + 180) - y \sin(\text{azim} + 180))^2}{a^2} + \frac{(x \sin(\text{azim} + 180) + y \cos(\text{azim} + 180))^2}{(h^2 \cotan^2(elev)) + a^2} = 1 \quad (18)$$

El sistema SRA estableció la primera conexión con la posición del Sol a través del ángulo de elevación 'elev'. En el sistema SRB se termina de establecer la conexión con el Sol a través del azimut solar 'azim'.

### 1.6.3. Paso de SRB a SRU

Este paso consiste en una traslación de los ejes coordenados a un nuevo origen sin cambiar sus direcciones. Las traslaciones de los ejes coordenados son transformaciones del tipo  $x \rightarrow x - x_0$  y

$y \rightarrow y - y_0$ . Los valores de  $x_0$  y  $y_0$  de esta traslación son los siguientes.

$$x_0 = x_a + (T + h) \cotan(elev) \sin(\text{azim} + 180)$$

$$y_0 = y_a + (T + h) \cotan(elev) \cos(\text{azim} + 180)$$

Aplicando la traslación a las variables de la ecuación (18), finalmente obtenemos la ecuación de la elipse respecto a SRU:

$$\frac{((x - x_0)\cos(\text{azim} + 180) - (y - y_0)\text{sen}(\text{azim} + 180))^2}{a^2} + \frac{((x - x_0)\text{sen}(\text{azim} + 180) + (y - y_0)\cos(\text{azim} + 180))^2}{(h^2 \cotan^2(\text{elev})) + a^2} \leq 1 \quad (19)$$

Para explicar los sumandos de  $x_0$  y  $y_0$  será suficiente hacerlo con una de estas expresiones, por ejemplo,  $x_0$  apoyándonos en la Figura 8. La distancia  $x_0$  que hay que trasladar el origen de coordenadas en la dirección del eje X es igual a

$$x_0 = x_a + (T + h) \cotan(\text{elev}) \text{sen}(\text{azim} + 180) \quad (20)$$

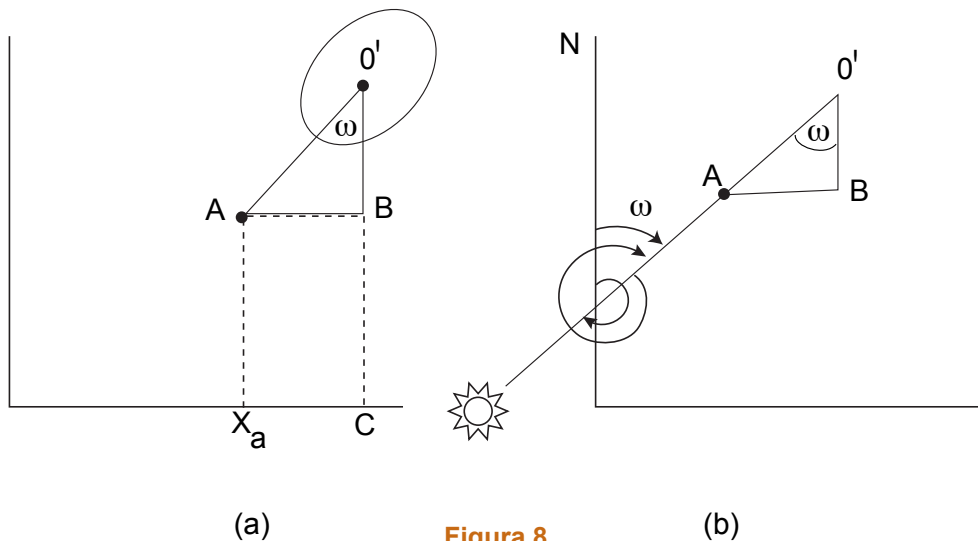


Figura 8

Como lo muestra la Figura 8(a), el primer sumando del miembro derecho  $x_a$  representa la abscisa del punto  $(x_a, y_a)$  donde está plantado el árbol. El factor  $|AO'| = (T+h)\cotan(\text{elev})$  representa la proyección de la distancia que hay del punto donde está plantado el árbol al centro de la copa. Según lo visto en la regla útil 1.3 esta distancia, por ser vertical, se proyecta multiplicándola por  $\cotan(\text{elev})$ . Finalmente, al multiplicarse este producto por  $\text{sen}(\omega)$  se obtiene la longitud del cateto AB del triángulo ABO', la cual es igual a  $|AO'| \text{sen}(\omega)$ . Sólo queda por justificar por qué  $\text{sen}(\text{azim} + 180) = \text{sen}(\omega)$ . La respuesta la tiene la Figura 8(b), donde el arco interior es igual al azimut solar (ángulo azim) y el arco intermedio es igual a  $\text{azim} + 180$ . En este segundo arco, se ve que el excedente de  $\text{azim} + 180$  sobre 360 es precisamente el ángulo  $\omega$ , es decir:  $\text{azim} + 180 - 360 = \omega$ , lo que significa que  $\text{azim} + 180$  y  $\omega$  son ángulos congruentes módulo 360 y cualquier función trigonométrica aplicada a uno de los ángulos da lo mismo que aplicarla al otro. La explicación concluye notando que el ángulo  $\omega$  dibujado como el arco exterior y el dibujado dentro del triángulo son iguales por ser ángulos internos alternos entre paralelas.

## 1.7. La sombra de las copas no elipsoidales sobre un plano horizontal

Debido a que los conos y los cilindros son superficies regladas (por cualquier punto de la superficie pasa una línea recta totalmente contenida en la superficie) estas superficies son más sencillas de tratar y la descomposición de la copa en dos o más figuras planas que proyectan la misma sombra que la superficie resulta aplicable.

### 1.7.1. Copa cilíndrica

La copa cilíndrica se descompone en dos discos (la base y la tapa del cilindro) y un rectángulo que reemplaza a la pared curva lateral. Según la regla 1.3, si la altura de la copa es  $H$ , la altura de la sombra será  $H \cotan(\text{elev})$  y el ancho de la sombra sería  $2a$ , el mismo que el de la copa. La Figura 9(a) muestra la descomposición de la copa en dos discos y un rectángulo que se opone al Sol. La Figura 9(b) muestra la sombra en SRA con las ecuaciones de las figuras en que se proyectan las líneas del rectángulo y los dos discos.

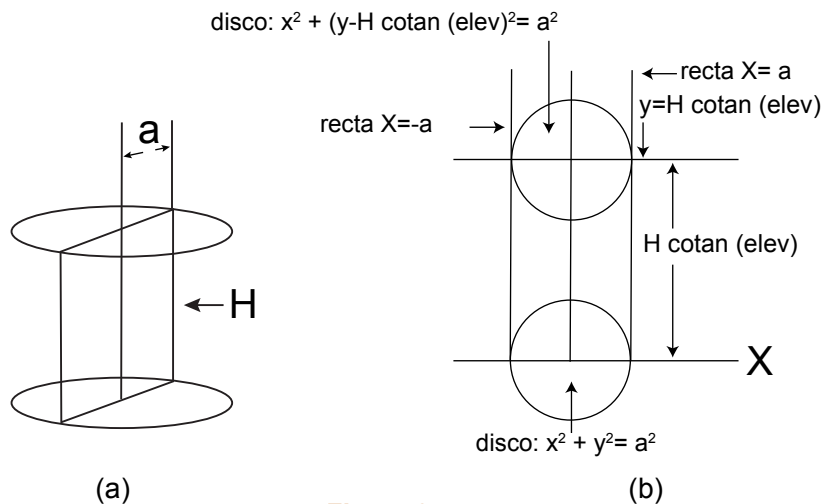


Figura 9

Los ejes  $X$  y  $Y$  del sistema SRA tienen el origen en el centro del disco de la base. La fórmula de la copa viene dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} Y \leq H \cotan(\text{elev}) \\ Y \geq 0 \\ X \leq a \\ X \geq -a \end{cases} \quad (21)$$

Este sistema de cuatro rectas representa la sombra del rectángulo.

Las sombras de los discos de la tapa y de la base vienen dadas por las desigualdades:

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (22)$$

$$X^2 + (Y - H \cotan(\text{elev}))^2 \leq a^2 \quad (23)$$

En las 6 desigualdades anteriores las variables X, Y y Z contienen la rotación SRA  $\rightarrow$  SRB y la traslación SRB  $\rightarrow$  SRU y su significado es el siguiente:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \sin(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sin(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

$$Z = \text{azim} + 180 - Y^+$$

Finalmente, las expresiones  $x_0$  y  $y_0$  representan las distancias desde el origen de SRU al origen de SRB a lo largo de cada eje coordenado de SRU.

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(\text{elev}) \sin(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(\text{elev}) \cos(Z)$$

**Significado del parámetro m.** Este parámetro representa un valor que pueden ingresar los usuarios y el cual reduce la longitud del tronco, efecto que equivale al de mapear las sombras a una altura m por encima del piso (aplicable cuando, por ejemplo, se desea conocer el mapa de sombras a la altura de las plantas de un cultivo que crece bajo los árboles).

### 1.7.2. Copa cónica

En el caso de una copa cónica, la misma se puede descomponer en el disco de la base y un triángulo que en todo momento se opone a los rayos solares.

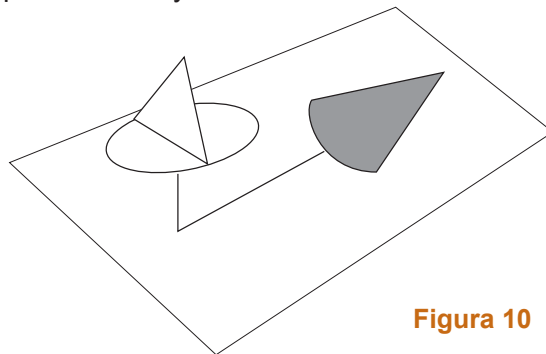


Figura 10

En este caso, la sombra del triángulo está constituida por tres rectas, una horizontal y dos líneas inclinadas. Si la altura de la copa es H, la altura de la sombra es  $H \cotan(\text{elev})$ . Para calcular la pendiente de las líneas inclinadas aplicamos la regla útil del apartado 1.3.

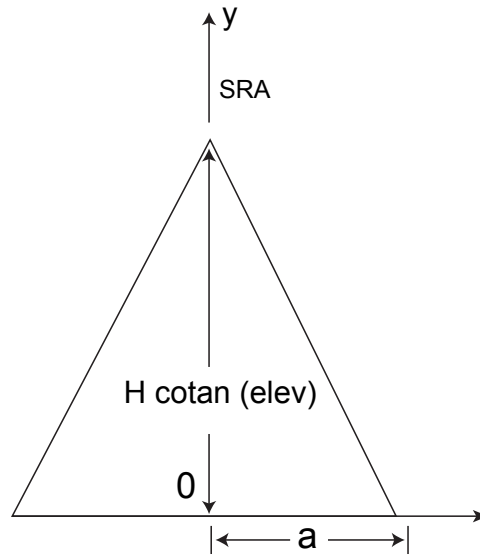


Figura 11

Como lo muestra la Figura 11, respecto al sistema SRA, ubicado en la base de la sombra, la pendiente de la recta que limita el lado izquierdo del triángulo de la sombra sería igual a

$$M = H \cotan(elev)/a$$

A la recta que limita el lado derecho le corresponde el mismo valor, pero con signo negativo. Ambas rectas cortan el eje Y a la altura  $H \cotan(elev)$ .

Expresiones analíticas de la sombra de una copa cónica respecto a SRA:

$$\begin{cases} Y \leq \frac{H \cotan(elev)}{a} X + H \cotan(elev) \\ Y \leq -\frac{H \cotan(elev)}{a} X + H \cotan(elev) \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

Las tres rectas del sistema anterior delimitan la sombra del triángulo.

La expresión del disco de la base es:

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (25)$$

# Fórmulas de las sombras en un plano horizontal

## 2.1. ¿Cómo se usan las fórmulas de las sombras en el software ShadeMotion?

Como se muestra en la Figura 3, en ShadeMotion el terreno se representa mediante un cuadrículado formado por celdillas, a cada una de las cuales corresponde un par de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . En términos generales, el programa hace un barrido o ‘escaneo’ del cuadrículado en busca de sombras. Para saber si la copa de un árbol está sombreando una determinada celdilla, el programa reemplaza las coordenadas  $(x, y)$  de la celdilla en las desigualdades de la sombra de dicho árbol. Si alguna de las condiciones dadas por las desigualdades se cumple, entonces se concluye que el árbol proyecta sombra sobre la celdilla inspeccionada, en caso contrario, se concluye que no lo hace.

## 2.2. Elevar el plano de proyección de las sombras y cambiar la orientación de los ejes coordenados

En las fórmulas aparecen las letras  $H, h, a,$  y  $T$  que corresponden a distintas partes del árbol, como se explicó al comienzo del documento. Además, aparecen las letras  $m$  y  $Y^+$  con el significado siguiente:  $m$ , como ya se indicó, representa la altura sobre el nivel del piso a la cual se desea proyectar las sombras, lo cual se consigue reduciendo la altura del tronco, y  $Y^+$  denota el ángulo de reorientación del eje  $Y$ , medido en sentido horario desde el norte. Esto significa que el sistema SRU aún puede colocarse de manera que su semieje  $Y$  positivo apunte en la dirección elegida por el usuario (su valor por defecto es el norte con  $Y^+ = 0$ ). La operación del cambio de orientación de los ejes coordenados solo es aplicable en el caso del plano horizontal. Las coordenadas donde se encuentra plantado el árbol respecto al sistema SRU del terreno son  $x_a$  y  $y_a$ . Finalmente, ‘ $x$ ’ y ‘ $y$ ’ son las variables de la desigualdad, es decir, las coordenadas de la celdilla que el programa está examinando para determinar si se satisfacen las desigualdades (si el árbol examinado proyecta sombra o no). Con tantos parámetros es conveniente empaquetar algunas expresiones bajo nombres auxiliares, con el fin de que las fórmulas resulten más legibles y que disminuya la posibilidad de cometer errores al llevarlas al código. Con este propósito, se definieron las letras  $X, Y, Z$ , cuyo significado ya se explicó, pero repetimos nuevamente:

$$\begin{aligned} X &= (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \operatorname{sen}(Z) \\ Y &= (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(Z) \\ Z &= \operatorname{azim} + 180 - Y^+ \end{aligned}$$

Nótese que las variables  $X$  y  $Y$  muestran claramente la aplicación de la rotación  $SRA \rightarrow SRB$  y de la traslación  $SRB \rightarrow SRU$  a las variables  $x, y$ .

Seguidamente, se presenta la lista de las desigualdades de todos los tipos de copa en un plano horizontal.

# Lista de las fórmulas de las sombras en un plano horizontal

## 3.1. Copas esféricas

Aunque una esfera es un caso especial de elipsoide con los tres semiejes de igual tamaño, en ShadeMotion se incluyen dichas copas por la frecuencia con que se presentan en la naturaleza. La desigualdad de la copa esférica es:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(a \cotan(elev))^2 + a^2} \leq 1 \quad (26)$$

Tomando en cuenta la identidad  $\cotan^2(\alpha) + 1 = \operatorname{cosec}^2(\alpha)$  y el hecho que  $\operatorname{cosec}(\alpha) = 1 / \operatorname{sen}(\alpha)$ , la ecuación de la esfera se puede escribir en la forma más sencilla:

$$X^2 + (Y \operatorname{sen}(elev))^2 \leq a^2 \quad (27)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - Y^+$$

SRA se ubica en el centro de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T + h - m) \cotan(elev) \operatorname{sen}(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T + h - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

## 3.2. Copas elipsoidales

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(h \cotan(elev))^2 + a^2} \leq 1 \quad (28)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - Y^+$$

SRA se ubica en el centro de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T + h - m) * \cotan(elev) * \sen(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T + h - m) * \cotan(elev) * \cos(Z)$$

### 3.3. Copas semielipsoidales (Incluye las copas semiesféricas cuando $a = H$ )

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(H \cotan(elev))^2 + a^2} \leq 1 \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (30)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \sen(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sen(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

$$Z = \text{azim} + 180 - Y^+$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(elev) \sen(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

El semielipsoide es la unión de la mitad superior de un elipsoide y el disco de la base. La sombra es la unión de una semielipse y un disco circular. El intérprete debe examinar dos condiciones, la condición (29) representa la mitad superior de una elipse y está formada por un sistema de dos desigualdades. La condición (30) representa el disco de la base.

### 3.4. Copas cónicas

$$\begin{cases} Y \leq \frac{H \cotan(elev)}{a} X + H \cotan(elev) \\ Y \leq -\frac{H \cotan(elev)}{a} X + H \cotan(elev) \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (32)$$

La superficie se representa mediante la mitad de un cono truncado (con el vértice hacia arriba) y el disco de la base. El cono se puede reemplazar por un triángulo vertical que se opone a los rayos solares y un disco circular. Se trata de dos condiciones, siendo la primera un sistema de tres rectas que delimitan el triángulo y la segunda el disco de la base.



Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - Y^+$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \operatorname{sen}(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \cos(Z)$$

### 3.5. Copas cónicas invertidas

La misma situación que la anterior, con el vértice del cono abajo y el disco arriba.

$$\begin{cases} Y \geq \frac{H \operatorname{cotan}(\operatorname{elev})}{a} X \\ Y \geq -\frac{H \operatorname{cotan}(\operatorname{elev})}{a} X \\ Y \leq H \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \end{cases} \quad (33)$$

$$X^2 + (Y - H \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}))^2 \leq a^2 \quad (34)$$

SRA se ubica en el vértice del cono (la copa) por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \operatorname{sen}(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \cos(Z)$$

Se trata de dos condiciones, siendo la primera un sistema de tres rectas que delimitan el triángulo y la segunda la tapa superior.

### 3.6. Copas cilíndricas

$$\begin{cases} Y \leq H \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \\ Y \geq 0 \\ X \leq a \\ X \geq -a \end{cases} \quad (35)$$

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (36)$$

$$X^2 + (Y - H \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}))^2 \leq a^2 \quad (37)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - Y^+$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(elev) \sen(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

La superficie del cilindro se representa mediante un rectángulo vertical que se opone al Sol y dos discos horizontales que representan la tapa de la base y la tapa superior del cilindro. El programa debe analizar tres condiciones, siendo la primera un sistema de cuatro rectas que delimitan el rectángulo, la segunda la tapa de la base y la tercera la tapa superior.

### 3.7. Copas tipo sombrilla

Las sombrillas son un caso particular de semielipsoides ‘aplastados’, en donde la altura de la copa es notablemente inferior a la mitad de su anchura (radio del círculo de la base).

# Las sombras en terrenos inclinados

La forma y dimensiones de la sombra de un árbol sobre un plano inclinado dependen también de la pendiente del plano y de su orientación cardinal (la sombra de un árbol en un plano inclinado cuya pendiente 'mira' al norte no es la misma que si la pendiente 'mira' al este). Este hecho hace necesaria la introducción de dos nuevos ángulos en las fórmulas: el ángulo gradiente del plano inclinado  $\sigma$  y el ángulo de orientación de la pendiente  $\delta$  (ver Figura 12).

- Llamaremos *línea gradiente* a una línea recta del plano inclinado que es perpendicular a las líneas horizontales de dicho plano, llamadas líneas de nivel. Se llama ángulo gradiente y le denotaremos mediante  $\sigma$  al ángulo que forma una línea gradiente con un plano horizontal.
- El ángulo de orientación de la pendiente  $\delta$  es el ángulo que forma un plano vertical que contiene la línea norte-sur con un plano vertical que contiene una línea gradiente en sentido descendente. Este ángulo se mide desde el norte en sentido horario, como se muestra en la Figura 12.

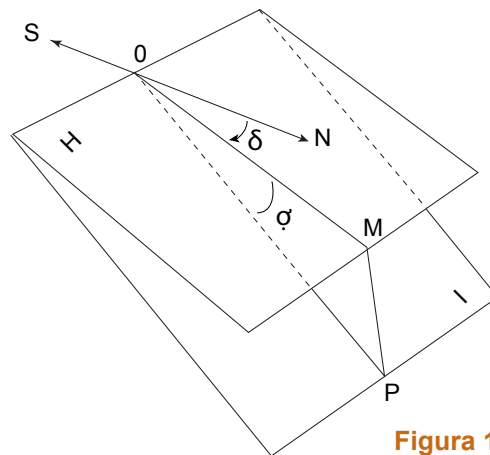


Figura 12

La estrategia para calcular las sombras en un terreno inclinado se basa en el reemplazo del plano inclinado por una *gradería* formada por tiras horizontales del ancho de las celdillas del terreno, como la que muestra la Figura 13. Las filas de la gradería son superficies de nivel de manera que las personas sentadas sobre las gradas estarían mirando en la dirección de la pendiente en sentido descendente. La ventaja de esta estrategia es que, con muy pocos cambios, permite reducir el cálculo de las fórmulas de las sombras al caso del plano horizontal.

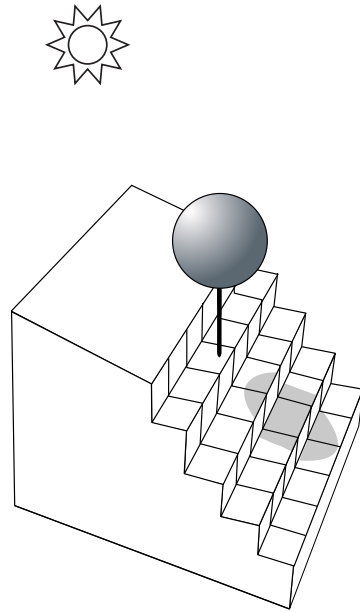


Figura 13

La Figura 14 muestra un plano inclinado  $I = ABCD$  sobre el que hay un árbol plantado en un punto  $P$ . Consideremos también un punto  $E$  de dicho plano. Para averiguar si la celdilla que contiene al punto  $E$  recibe sombra del árbol plantado en  $P$ , concebimos momentáneamente un plano horizontal imaginario  $H = OCDG$  que pasa por el punto  $E$  y consideramos que el árbol, en lugar de estar plantado en el punto  $P$  del plano inclinado, se encuentra plantado en el punto  $Q$  del plano horizontal imaginario.

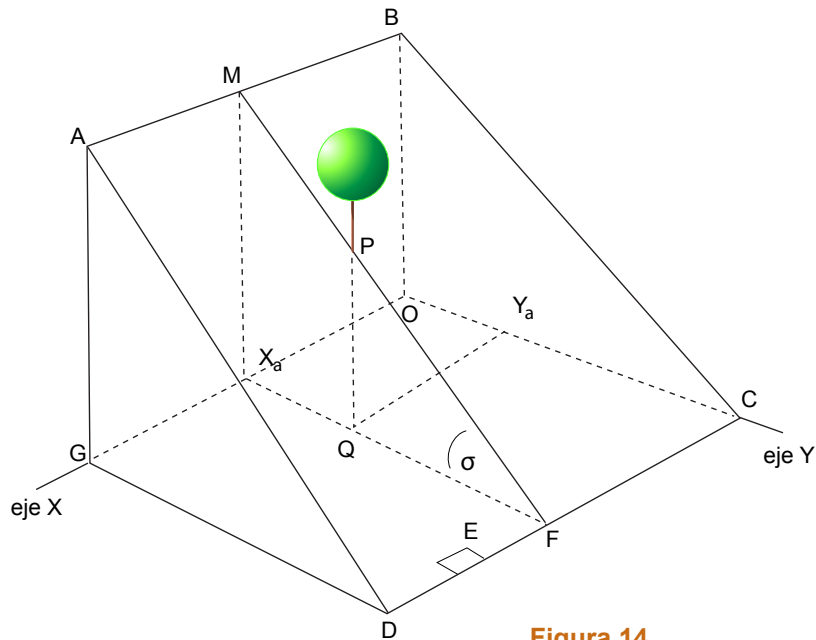


Figura 14

La cuestión se reduce a lo siguiente: si las coordenadas de la celdilla del punto  $E$  en el plano horizontal satisfacen el criterio de sombra para el árbol plantado en el punto  $Q$ , es decir, con el tronco extendido (o contraído según la celdilla se encuentra más abajo o más arriba que el árbol) entonces concluiríamos que la celdilla que contiene el punto  $E$  del plano inclinado también satisface el criterio de sombra (Figura 14).

Esta estrategia, sin embargo, introduce un desfase entre las celdillas del plano inclinado  $I$  y las del plano horizontal  $H$  en la dirección del eje  $Y$  de ambos planos, lo cual hace que cuando se proyecta el cuadrículado del plano inclinado sobre el plano horizontal, las coordenadas de las celdillas de ambos planos no tienen los mismos valores de sus coordenadas, específicamente no en la dirección del eje  $Y$ . Esto es debido a que las distancias en la dirección  $Y$  por el plano inclinado se proyectan sobre el plano horizontal reduciendo su tamaño por un factor igual a  $\cos(\sigma)$  (la relación que existe entre la hipotenusa y uno de sus catetos). Una celdilla de coordenadas  $(a, b)$  sobre el plano inclinado se proyectaría en el plano horizontal con coordenadas  $(a, b \cos(\sigma))$ , como lo muestra la Figura 15. Puesto que estamos utilizando las ecuaciones del plano horizontal  $H$  para calcular las ecuaciones de las sombras en el plano inclinado  $I$ , debemos preguntarnos si hay que introducir alguna modificación en las fórmulas del plano horizontal para compensar este efecto, el cual aumenta al aumentar el ángulo  $\sigma$ .

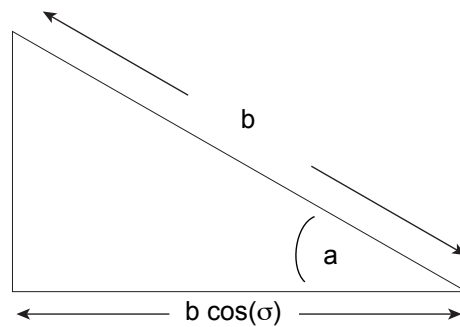


Figura 15

Para encontrar esa compensación observemos que:

1. Una celdilla de coordenada  $(a, b)$  del plano  $I$  se proyecta en una celdilla de coordenadas  $(a, b \cos(\sigma))$  del plano  $H$ .
2. Para hacer el test de sombra a una celdilla de coordenadas  $(a, b)$  del plano  $I$  se hace el test de sombra a la celdilla  $(a, b \cos(\sigma))$  del plano  $H$  y el resultado obtenido se aplica a la celdilla  $(a, b)$  del plano  $I$ .
3. El anterior resultado se consigue multiplicando todas las apariciones de la variable ' $y$ ' y las distancias en la dirección del eje  $Y$  por el factor  $\cos(\sigma)$  en todas las fórmulas del plano  $H$ . Esto las convierte en las fórmulas apropiadas para el plano  $I$ .

Se pone en práctica la anterior regla 3 multiplicando por  $\cos(\sigma)$  los factores  $(y - y_0)$  que aparecen en las expresiones de  $X$  y  $Y$  del plano  $H$ :

Para planos horizontales teníamos:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \sin(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sin(Z) + (y - y_0) \cos(Z)$$

Para planos inclinados se cambia a

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

Notar que la diferencia se encuentra en el segundo término de X y Y el cual ahora aparece multiplicado por  $\cos(\sigma)$ .

Este pequeño cambio tiene efecto toda vez que aparece la variable 'y' en las fórmulas, lo mismo que a las distancias en la dirección Y, que están contenidas en  $x_0$  y  $y_0$ .

También hay que modificar la expresión de la variable Z, la cual pasa a ser:

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - \delta$$

## 4.1. Copas esféricas

$$X^2 + (Y \operatorname{sen}(\operatorname{elev}))^2 \leq a^2 \quad (38)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - \delta$$

SRA se ubica en el centro de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T + h - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \operatorname{sen}(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T + h - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \cos(Z)$$

## 4.2. Copas elipsoidales

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(h \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}))^2 + a^2} \leq 1 \quad (39)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \operatorname{sen}(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \operatorname{sen}(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

$$Z = \operatorname{azim} + 180 - \delta$$

SRA se ubica en el centro de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T + h - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \operatorname{sen}(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T + h - m) \operatorname{cotan}(\operatorname{elev}) \cos(Z)$$

### 4.3. Copas semi-elipsoidales

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(H \cotan(elev))^2 + a^2} \leq 1 \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (40)$$

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (41)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \sin(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sin(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

$$Z = azim + 180 - \delta$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(elev) \sin(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

### 4.4. Copas cónicas

$$\begin{cases} Y \leq \frac{H \cotan(elev)}{a} X + H \cotan(elev) \\ Y \leq -\frac{H \cotan(elev)}{a} X + H \cotan(elev) \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (42)$$

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (43)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \sin(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sin(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

$$Z = azim + 180 - \delta$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(elev) \sin(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

## 4.5. Copas cónicas invertidas

$$\begin{cases} Y \geq \frac{H \cotan(elev)}{a} X \\ Y \geq -\frac{H \cotan(elev)}{a} X \\ Y \leq H \cotan(elev) \end{cases} \quad (44)$$

$$X^2 + (Y - H \cotan(elev))^2 \leq a^2 \quad (45)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \sin(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sin(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

$$Z = azim + 180 - \delta$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(elev) \sin(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

## 4.6. Copas cilíndricas.

$$\begin{cases} Y \leq H \cotan(elev) \\ Y \geq 0 \\ X \leq a \\ X \geq -a \end{cases} \quad (46)$$

$$X^2 + Y^2 \leq a^2 \quad (47)$$

$$X^2 + (Y - H \cotan(elev))^2 \leq a^2 \quad (48)$$

Donde:

$$X = (x - x_0) \cos(Z) - (y - y_0) \cos(\sigma) \sin(Z)$$

$$Y = (x - x_0) \sin(Z) + (y - y_0) \cos(\sigma) \cos(Z)$$

$$Z = azim + 180 - \delta$$

SRA se ubica en la base de la copa por lo que:

$$x_0 = x_a + (T - m) \cotan(elev) \sin(Z)$$

$$y_0 = y_a + (T - m) \cotan(elev) \cos(Z)$$

## 4.7. Copas tipo sombrilla

Las sombrillas son un caso particular de semielipsoides ‘aplastados’, debido a que la altura de la copa es notablemente inferior a la mitad de su anchura (radio del círculo de la base).



## Transformaciones algebraicas empleadas y su significado geométrico

Puesto que la obtención de las fórmulas pasa por los cambios de coordenadas

SRA  $\rightarrow$  SRB  $\rightarrow$  SRU que consisten en rotaciones y traslaciones del sistema de ejes coordenados, repasamos aquí cómo se expresan algebraicamente estas transformaciones geométricas. Emplearemos la notación  $x \rightarrow s(x, y)$ ,  $y \rightarrow r(x, y)$  para indicar que en una expresión del tipo

$F(x, y) = 0$  se reemplazan todas las apariciones de la variable  $x$  por la expresión  $s(x, y)$  y todas las apariciones de la variable  $y$  por la expresión  $r(x, y)$ , convirtiéndose la expresión en

$F(s(x, y), r(x, y))$ . Por ejemplo, la transformación  $x \rightarrow x^2$ ,  $y \rightarrow xy$  aplicada a la expresión  $x^3 + 2xy + 5$  la convierte en  $(x^2)^3 + 2x^2(xy) + 5 = x^6 + 2x^3y + 5$ . Describiremos el efecto geométrico que tiene la aplicación de algunas transformaciones algebraicas de las variables sobre los ejes coordenados cartesianos o sobre los lugares geométricos descritos por expresiones algebraicas (círculos, rectas, etc.).

### Traslaciones

Las traslaciones de los ejes coordenados manteniendo sus respectivas direcciones son transformación algebraica del tipo  $x \rightarrow x - h$ ,  $y \rightarrow y - k$ . Cuando  $h$  y  $k$  son positivos trasladan el origen de los ejes coordenados al punto  $(h, k)$  o lo que es igual,  $h$  unidades a la derecha y  $k$  unidades a hacia arriba, dejando los puntos del plano (en particular las figuras) en el mismo sitio. Fijando el punto de vista en los puntos del plano y no en los ejes coordenados, esta transformación traslada las figuras  $h$  unidades a la izquierda y  $k$  unidades hacia abajo dejando los ejes donde se encuentran. Si  $h$  o  $k$  son negativos el efecto es el opuesto (en el sentido derecha-izquierda o arriba-abajo).

**Ejemplo.** Si aplicamos la transformación algebraica  $x \rightarrow x + 1$ ,  $y \rightarrow y - 1$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  con centro en  $(0, 0)$  obtenemos la circunferencia  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$  con centro en  $(-1, 1)$ . Las Figuras 16(a) y 16(b) muestran la circunferencia antes y después de aplicada la transformación.

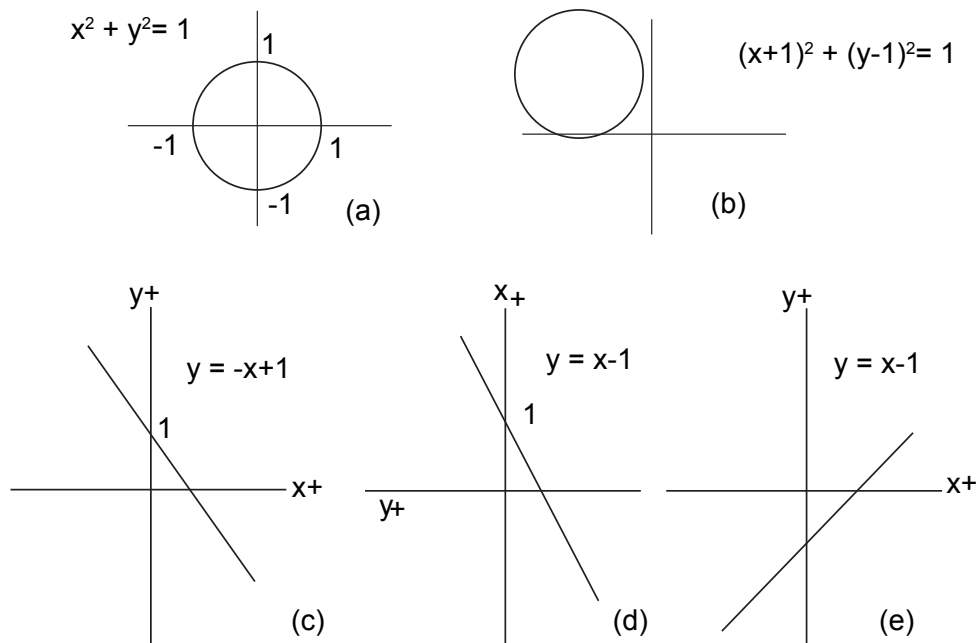


Figura 16

**Rotaciones.** La transformación algebraica:  $x \rightarrow x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$ ,  $y \rightarrow x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$ , la cual se puede expresar matricialmente en la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con  $\theta$  un ángulo positivo, tiene como efecto geométrico la rotación de los ejes coordenados por un ángulo  $\theta$  alrededor del origen de coordenadas en sentido antihorario (giro a la izquierda), dejando la figura en su lugar o equivalentemente rota los puntos del plano (figuras incluidas) en sentido horario alrededor del origen de coordenadas por un ángulo  $\theta$ , dejando los ejes en su lugar.

**Ejemplo.** Si aplicamos la matriz de rotación anterior a las variables  $x$ ,  $y$  de la recta  $y = -x + 1$  con un valor  $\theta$  de  $90^\circ$ , obtenemos la expresión  $x\sin(90) + y\cos(90) = -(x\cos(90) - y\sin(90)) + 1$ , o sea  $x = y + 1$ , o bien  $y = x - 1$ . La Figura 15(c) muestra la recta  $y = -x + 1$  antes de aplicarle la transformación, y la Figura 15(d) muestra el resultado de girar los ejes coordenados  $90$  grados a la izquierda (antihorario), manteniendo la recta en la misma posición, operación que transforma la ecuación  $y = -x + 1$  en  $y = x - 1$ . Puesto que el eje  $Y+$  ha quedado acostado, apuntando hacia la izquierda, giramos la hoja de papel (plano y figuras)  $90^\circ$  a la derecha a fin de ver los ejes en la manera usual, con el  $Y+$  apuntando hacia arriba Figura 12(e) (el giro del papel es un simple movimiento externo del observador y no una transformación geométrica ni algebraica).

Este fenómeno, en el cual el efecto sobre el objeto geométrico (conjunto de puntos) es el opuesto al de los ejes coordenados, es una manifestación del efecto de ‘covariancia versus contravariancia’ (si me desplazo hacia adelante veo el mundo que me rodea desplazarse hacia atrás, si giro a la derecha veo el mundo a mi alrededor girar hacia la izquierda). En álgebra lineal, por ejemplo, la matriz de cambio de una base B a una base B' es la matriz inversa traspuesta de la matriz de cambio de coordenadas de los vectores, cuando se los expresa respecto a dichas bases. En geometría analítica a este fenómeno también se le conoce como el punto de vista *alias* versus el punto de vista *alibi*.

## Agradecimientos

La preparación de este Manual fue financiada por el programa Forests, Trees and Agroforestry (FTA) del CGIAR y por el CATIE.

## Referencias

- Bakulin P.; Kononovich E.; Moroz V. 1983. Curso de astronomía general. Editorial MIR, Moscú, URSS, 567 pp..
- Beecher J.; Penna J.; Bittinger M. 2011. Algebra and trigonometry. Pearson, New York, N.Y., E.U.A., 1120 pp.
- Golovina L.I. 1974. Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones. Editorial MIR, Moscú, URSS, 277 pp.
- Lang S. 1987. Linear Algebra (Third edition), Springer-Verlag, New Haven, Connecticut, E.U.A, 296 pp.
- Moise E.; Dows F. Jr. 1986. Geometría moderna, Addison-Wesley Iberoamericana, Willmington, Delaware, E.U.A., 578 pp.
- Preston G.; Lovaglia A. 1971. Modern analytic geometry, Harper & Row, New York, N.Y., E.U.A., 319 pp.
- Quesada F.; Somarriba E.; Vargas E. 1987. Modelos para la simulación de sombras de árboles. Serie Técnica. Informe Técnico 118, CATIE, Costa Rica., 91 pp.
- Sellers W.D., 1965. Physical climatology, Chicago university press, Chicago, 272 pp.
- Stewart J. 2001. Cálculo de una variable. Thomson Learning, México D.F., 639 pp.
- Varilly J.C. 2014. Elementos de geometría plana. 2º edición, Editorial UCR, San José, Costa Rica, 413 pp.

CATIE (Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza) es un centro regional dedicado a la investigación y la enseñanza de posgrado en agricultura, manejo, conservación y uso sostenible de los recursos naturales. Sus miembros son Belice, Bolivia, Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, República Dominicana, Venezuela y el Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA).



Solutions for environment and development  
Soluciones para el ambiente y desarrollo

Sede Central, CATIE  
Cartago, Turrialba, 30501  
Costa Rica  
Tel. + (506) 2558-2000

ISBN: 978-9977-57-746-3

