CONSEJO ESTUDIANTIL - CATIE

POLINOMIOS ORTOGONALES

ALEX L. TINEO BERMUDEZ

NOTAS DE ESTUDIO

1993

Agradecimientos a:

Pedro Ferreira, Ph. D
Gilda Piaggio, Ph. D
Johnny Pérez, Analista de datos

por su extraordinaria labor en la enseñanza
de la Estadística en la Escuela de Postgrado de CATIE

CON EL MAYOR CARIÑO:

A LA MEMORIA DEL "MAESTRO"

Ing. ROBERTO A. IBAÑEZ AGUERO

P R E F A C I O

Hace ocho años, cuando aún era estudiante en la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga (UNSCH), recibí los primeros tópicos sobre polinomios ortogonales, del "MAESTRO" Ing. Roberto Ibáñez Agüero; Motivado por el tema realicé una primera publicación en 1988. Luego de haber recibido más tópicos sobre el tema, esta vez en el Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza (CATIE), me propuse preparar el presente documento.

El objetivo principal, es presentar de manera sencilla el fundamento de la "técnica de los Polinomios Ortogonales" para el análisis de regresión; En la primera parte se incluye también el procedimiento a seguir para la confección de Tablas de Polinomios Ortogonales, la que es de mucha importancia cuando no se tiene a la mano una tabla de estos coeficientes. En la segunda parte se incluyen ejemplos de aplicación práctica de esta importante técnica de análisis de regresión, en el contexto de algunos diseños experimentales más comunes.

La realización de este documento ha sido posible gracias a la participación de un conjunto de personas. Debo empezar agradeciendo por sus enseñanzas a mis profesores de la UNSCH y del CATIE. En la UNSCH, al Ing. Roberto Ibáñez, por sus primeras enseñanzas y la discusión de tópicos avanzados sobre el tema; a él mi mayor agradecimiento; Al Ing. Guido Tenorio Palomino, profesor del Area de Suelos en la Facultad de Ciencias Agrarias, por haberme brindado la primera oportunidad para trabajar en tópicos de regresión, y por su constante apoyo en mi formación profesional; A Jorge Gutiérrez Castilla y Walter Rupay Ingaruca, por el mecanografiado y correcciones de la primera publicación; Al Biólogo Fidel Mujica Lengua, profesor de la Facultad de Ciencias Biológicas, por sus invitaciones como ponente sobre el tema en cursos cortos de Bioestadística y similares. A mis colegas y alumnos por su permanente apoyo. En el CATIE, a mis profesores Dr. Pedro Ferreira y Dra. Gilda Piaggio por sus enseñanzas y consejos; A mis colegas estudiantes de la Escuela de Posgrado, Promoción 91 - 93, por su permanente apoyo.

Espero que este documento sea de utilidad para quienes tengan la oportunidad de leerlo. Estaré agradecido por sus críticas y sugerencias, a cuantos de esa manera ayuden a mejorar la presente edición.

Alex L. Tineo Bermúdez
Estudiante de Maestría,
CATIE, Costa Rica, 1993.

PRESENTACION

Para el consejo estudiantil, período 92-93, constituye un honor y una gran satisfacción el presentar estos apuntes de Clase sobre **Polinomios Ortogonales**, que fueran elaborados por nuestro compañero Alex Tineo Bermúdez.

El autor es estudiante de la Escuela de Posgrado del Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza, CATIE, promoción 91-93, y es originario de Ayacucho, Perú. Se graduó de Ingeniero Agrónomo en la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, en 1985, año desde el cual labora como catedrático en la Facultad de Ciencias Agrarias de dicha Universidad.

El Consejo Estudiantil considera que el aporte hecho por Alex Tineo a través de este documento, constituye un precedente de gran valía y un estímulo para los estudiantes de Maestría de la Institución, para que como él, con sus ideas contribuyan al desarrollo de la agronomía.

Gracias Alex, por tu sencillez, por tu amistad y tu gran capacidad académica puesta siempre al servicio de los demás.

Héctor Lobos Medina

Secretario Académico.

CONTENIDO:

PRIMERA PARTE:

FUNDAMENTO DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

SEGUNDA PARTE:

LOS POLINOMIOS ORTOGONALES EN EL CONTEXTO DE UN DISEÑO EXPERIMENTAL

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTO DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

I. GENERALIDADES

El tipo más común y sencillo de ajuste de curvas es la regresión lineal representada por una línea recta. Esto sucede cuando al variar los valores de la variable independiente (X), los valores de la variable dependiente (Y) tienden a variar con alguna proporcionalidad. Sin embargo, cuando los valores de X varían y no existe un incremento o decremento proporcional en la variable respuesta o dependiente (Y), esto estaría anunciando una Regresión Curvilínea. Entonces debe determinarse la función que mejor represente a las variables en estudio, la misma que puede realizarse en base a dos criterios:

a) la experiencia o grado de conocimiento que se tenga de las variables en estudio; y

b) un gráfico de las observaciones en un plano bidimensional o plano cartesiano (cuando no se tiene al alcance el primer criterio).

La regresión curvilínea no siempre es problema simple. Prácticamente no hay límites en cuanto al número de curvas que pueden expresarse por medio de ecuaciones matemáticas.

Entre las más comunes podemos considerar dos tipos de curvas:

a) exponenciales o logarítmicas; y

b) polinomiales.

En el primer caso, en general, las curvas son siempre asintóticas a los ejes, es decir, no tienen máximos o mínimos; en el segundo caso, los polinomios pueden tener picos (máximos) y/o depresiones (mínimos), cuyo número es uno menos que el grado exponencial de la función.

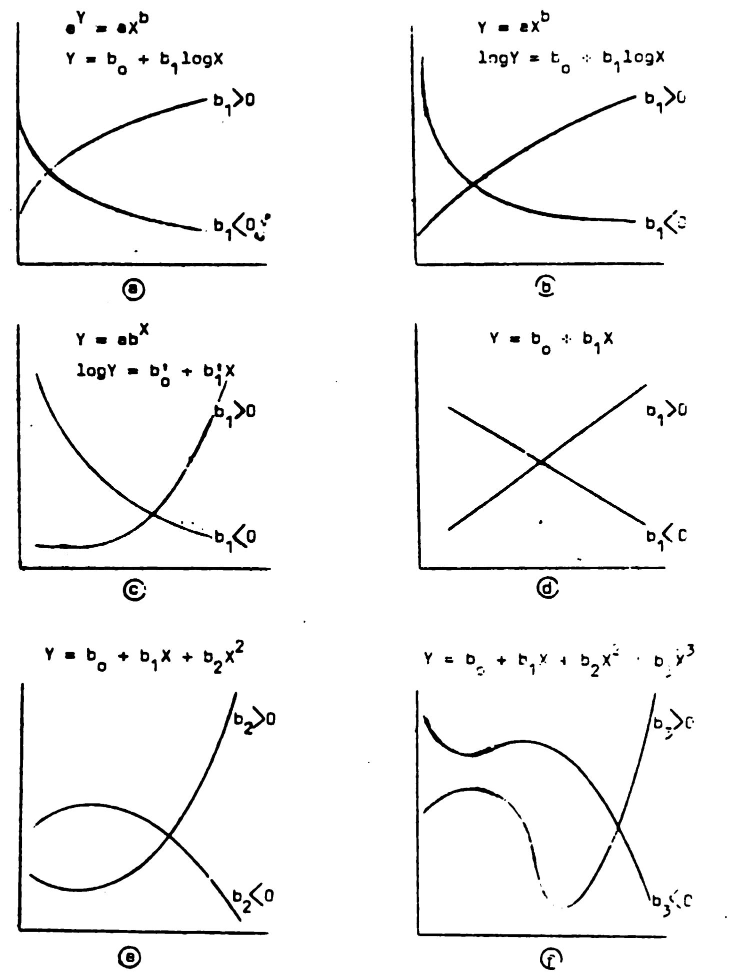


fig 1. Representación gráfica de las funciones más comunes:

a, b, c : exponenciales o logarítmicas

d, e, f : polinómicas (lineal, cuadrática, cúbica, respectivamente)

Para la resolución de la Regresión curvilínea se cuenta con varias técnicas o procedimientos como: los mínimos cuadrados, Gauss-Doolitle, los polinomios ortogonales, etc. En este documento se tratará sólo el caso de los modelos polinomiales, cuando los incrementos entre niveles sucesivos de la variable independiente (X) son iguales.

II. LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

El análisis de tendencia por el método de los polinomios ortogonales es una técnica que se utiliza para determinar la regresión cuando la variable independiente (X) se encuentra espaciada a intervalos iguales. Por ejemplo, si la variable independiente es el tiempo y se hacen lecturas de Y a intervalos diarios, semanales, quincenales mensuales o anuales, las X o tiempo están igualmente espaciados. Otro caso donde es común tener intervalos igualmente espaciados de X, es el de experimentos que contemplan proporciones de fungicidas, insecticidas, fertilizantes, etc. Como ilustración se muestran dos casos:

a) incremento de peso (Y) de un grupo de conejos alimentados con una determinada ración durante nueve (9) semanas.

b) rendimiento de maíz, sometido a cinco (5) niveles de fertilización nitrogenada

Tiempo (semanas)	**Peso** (g)
1ª	Y_1
2ª	Y_2
3ª	Y_3
...	
...	
9ª	Y_9

→ **intervalos iguales de 1 semana**

Nivel de N (kg/ha)	**Producción** (kg/ha)
0	Y_1
40	Y_2
80	Y_3
120	Y_4
160	Y_5
200	Y_6

→ **intervalos iguales de 40 kg/ha**

Mediante esta técnica con un solo análisis se determina el modelo polinomial (lineal, cuadrático, cúbico, etc.), que mejor represente a las variables en estudio.

Así, el ajuste del polinomio:

$$Y_i = b_o + b_1X_i + b_2X_i^2 + b_3X_i^3 + \dots + b_kX_i^k + e_i$$

se facilita empleando tablas de coeficientes para polinomios ortogonales (ver anexo).

El paso inicial consiste en sustituir X^k (k=1,2,3,...,k) por un polinomio de grado k en P; de manera que la regresión polinomial anterior, ahora se calcula en la forma:

$$Y_i = B_o + B_1P_{i1} + B_2P_{i2} + B_3P_{i3} + \dots + B_kP_{ik} + e_i$$

Lo que puede demostrarse que da el mismo polinomio ajustado (ver nota 1 y ejemplos).

---------- * ---------

Nota 1: Algunas características de los dos modelos (para los mismos datos), se analizan a continuación:

$Yi = b0 + b1Xi + ei$	$Yi = B0 + B1Pi1 + ei$
$Yi = b0 + b1Xi + b2Xi2 + ei$	$Yi = B0 + B1Pi1 + B2Pi2 + ei$
$Yi = b0 + b1Xi + b2Xi2 + b3Xi3 + ei$	$Yi = B0 + B1Pi1 + B2Pi2 + B3Pi3 + ei$
...	
$Yi = b0 + b1Xi + b2Xi2 + b3Xi3 + \dots + bkXik + ei$	$Yi = B0 + B1Pi1 + B2Pi2 + B3Pi3 + \dots + BkPik + ei$
b0 y b1 : son diferentes en los tres polinomios	B0 y B1 : son iguales en los tres polinomios
bi : dependen de cada función	Bi : son independientes y acumulativos

Los valores ajustados en ambos polinomios serían:

$Y1 = b0 + b1X1 + b2X12 + b3X13 + \dots + bkX1k + e1$	$Y1' = B0 + B1P11 + B2P12 + B3P13 + \dots + BkP1k + e1'$
$Y2 = b0 + b1X2 + b2X22 + b3X23 + \dots + bkX2k + e2$	$Y2' = B0 + B1P21 + B2P22 + B3P23 + \dots + BkP2k + e2'$
$Y3 = b0 + b1X3 + b2X32 + b3X33 + \dots + bkX3k + e3$	$Y3' = B0 + B1P31 + B2P32 + B3P33 + \dots + BkP3k + e3'$
...	
$Yn = b0 + b1Xn + b2Xn2 + b3Xn3 + \dots + bkXnk + en$	$Yn' = B0 + B1Pn1 + B2Pn2 + B3Pn3 + \dots + BkPnk + en'$

Luego: $\hat{Y}_1 = Y_1'$, $Y_2 = Y_2'$, $Y_3 = Y_3'$, ... , $Y_n = Y_n'$

El modelo polinomial codificado (usando los polinomios ortogonales), se puede representar en forma matricial del siguiente modo:

$$\underset{\underline{Y}}{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1k} \\ 1 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2k} \\ 1 & P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3k} \\ \dots & & & & & \\ 1 & P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nk} \end{bmatrix}} * \underset{\beta}{\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_k \end{bmatrix}} + \underset{\underline{e}}{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}}$$

o, de esta manera:

$$\underline{Y} = P*\beta + \underline{e}$$

Por otro lado:

$$SC_{error} = (\underline{e})'(\underline{e})$$

Luego:

$$SC_{error} = (\underline{Y} - P\beta)'(\underline{Y} - P\beta)$$

Desarrollando se obtiene:

$$\beta = (P'P)^{-1}P'\underline{Y}$$

Los valores de P_{ik} se pueden encontrar en las tablas de Fisher y Yates (1948), desde n=3 hasta n=75; asimismo en las tablas de Anderson y Houseman (1942), desde n=3 hasta n=104 (ANDERSON y BANCROFT, 1952; STEEL y TORRIE, 1988).

La ortogonalidad de los coeficientes polinómicos se define por las condiciones siguientes:

$$\Sigma P_{ik} = 0$$
$$\Sigma P_{ik}P_{ik'} = 0 \qquad ik \neq ik'$$

III. CALCULOS DE LOS COEFICIENTES DE REGRESION (B_0, B_1).

La relación:

$$\beta = (P'P)^{-1}P'Y$$

matricialmente, se escribe como:

$$\beta = \left\{ \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ P11 & P21 & P31 & \dots & Pn1 \\ P12 & P22 & P32 & & Pn2 \\ P13 & P23 & P33 & & Pn3 \\ \dots & & & & \\ P1k & P2k & P3k & & Pnk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P11 & P12 & P13 & \dots & P1k \\ 1 & P21 & P22 & P23 & & P2k \\ 1 & P31 & P32 & P33 & & P3k \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 1 & Pn1 & Pn2 & Pn3 & & Pnk \end{bmatrix} \right]^{-1} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ P11 & P21 & P31 & \dots & Pn1 \\ P12 & P22 & P32 & & Pn2 \\ P13 & P23 & P33 & & Pn3 \\ \dots & & & & \\ P1k & P2k & P3k & & Pnk \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ \dots \\ \dots \\ Yn \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones, se tiene:

$$\beta = \begin{bmatrix} n & \Sigma Pi1 & \Sigma Pi2 & \Sigma Pi3 & \dots & \Sigma Pik \\ \Sigma Pi1 & \Sigma Pi1^2 & \Sigma Pi1Pi2 & \Sigma Pi1Pi3 & & \Sigma Pi1Pik \\ \Sigma Pi2 & \Sigma Pi2Pi1 & \Sigma Pi2^2 & \Sigma Pi2Pi3 & & \Sigma Pi2Pik \\ \Sigma Pi3 & \Sigma Pi3Pi1 & \Sigma Pi3Pi2 & \Sigma Pi3^2 & & \Sigma Pi3Pik \\ \dots & & & & & \dots \\ \Sigma Pik & \Sigma PikPi1 & \Sigma PikPi2 & \Sigma PikPi3 & & \Sigma Pik^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma Yi \\ \Sigma Pi1Yi \\ \Sigma Pi2Yi \\ \Sigma Pi3Yi \\ \dots \\ \Sigma PikYi \end{bmatrix}$$

pero:

$$\Sigma Pik = 0$$
$$\Sigma PikPik' = 0$$

Por consiguiente:

$$\beta = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma P_{i1}^2 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma P_{i2}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma P_{i3}^2 & & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \Sigma P_{ik}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma P_{i1} Y_i \\ \Sigma P_{i2} Y_i \\ \Sigma P_{i3} Y_i \\ \dots \\ \Sigma P_{ik} Y_i \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\Sigma P_{i1}^2 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Sigma P_{i2}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\Sigma P_{i3}^2 & & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1/\Sigma P_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma P_{i1} Y_i \\ \Sigma P_{i2} Y_i \\ \Sigma P_{i3} Y_i \\ \dots \\ \Sigma P_{ik} Y_i \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\beta = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i/n \\ \Sigma P_{i1} Y_i/\Sigma P_{i1}^2 \\ \Sigma P_{i2} Y_i/\Sigma P_{i2}^2 \\ \Sigma P_{i3} Y_i/\Sigma P_{i3}^2 \\ \dots \\ \Sigma P_{ik} Y_i/\Sigma P_{ik}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_k \end{bmatrix} \quad \text{es decir:} \quad \begin{aligned} B_o &= \Sigma Y_i/n = Y \\ B_1 &= \Sigma P_{i1} Y_i/\Sigma P_{i1}^2 \\ B_2 &= \Sigma P_{i2} Y_i/\Sigma P_{i2}^2 \\ B_3 &= \Sigma P_{i3} Y_i/\Sigma P_{i3}^2 \\ &\dots \\ B_k &= \Sigma P_{ik} Y_i/\Sigma P_{ik}^2 \end{aligned}$$

IV. ANALISIS DE VARIANZA.

La suma de cuadrados **(SC)**, se determina como en el caso de la regresión lineal simple; es decir, mediante el producto de su estimador por el correspondiente lado derecho de su ecuación normal.

Las ecuaciones normales son:

$$nB_o = \Sigma Y_i$$
$$B_1\Sigma P_{i1}^2 = \Sigma P_{i1}Y_i$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$B_k\Sigma P_{ik}^2 = \Sigma P_{ik}Y_i$$

Las SC serán:

$$SC(B_o) = B_o\Sigma Y_i = (\Sigma Y_i/n)\Sigma Y_i = (\Sigma Y_i)^2/n$$
$$SC(B_1) = B_1\Sigma P_{i1}Y_i = (\Sigma P_{i1}Y_i/\Sigma P_{i1}^2)\Sigma P_{i1}Y_i = (P_{i1}Y_i)^2/\Sigma P_{i1}^2$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$SC(B_k) = B_k\Sigma P_{ik}Y_i = (\Sigma P_{ik}Y_i/\Sigma P_{ik}^2)\Sigma P_{ik}Y_i = (P_{ik}Y_i)^2/\Sigma P_{ik}^2$$

Los cuadrados medios **(CM)**, como en cualquier análisis de varianza (ANDEVA), corresponden al cociente de la SC de una fuente de variación cualquiera entre su respectivo grado de libertad **(GL)**.

El valor de F calculado **(Fc)** para una función, resulta de la división del CM de una función entre el cuadrado medio de su respectivo residual; el valor de la F de tablas **(Ft)**, se busca en la tabla correspondiente con los GL de la función (numerador) y los GL de su respectivo residual (denominador).

De esta forma, la estructura del cuadro de ANDEVA, será como la que se muestra en el cuadro 1.

Cuadro 1. Esquema del cuadro de ANDEVA para el análisis de tendencias por el método de los Polinomios Ortogonales.

Fuente de Variación	GL	Suma de Cuadrados	CM	Fc
función lineal	1	$B1\Sigma Pi1Yi$	a	a/b
residual f. lineal	n-2	$\Sigma yi^2 - B1\Sigma Pi1Yi$	b	
función cuadrática	1	$B2\Sigma Pi2Yi$	c	c/d
residual f. cuadrát.	n-3	$\Sigma yi^2 - (B1\Sigma Pi1Yi+B2\Sigma Pi2Yi)$	d	
función cúbica	1	$B3\Sigma Pi3Yi$	e	e/f
residual f. cúbica	n-4	$\Sigma yi^2 - (B1\Sigma Pi1Yi+B2\Sigma Pi2Yi+B3\Sigma Pi3Yi)$	f	
...				
TOTAL	n-1	$\Sigma yi^2 = \Sigma Yi^2 - (\Sigma Yi)^2/n$		

Con el ANDEVA de determina el modelo polinomial que mejor representa a las variables en estudio, cuya estructura general, es la siguiente:

$$Y_i = B_o + B_1P_{i1} + B_2P_{i2} + B_3P_{i3} + \ldots + B_kP_{ik} + e_i$$

Para descodificarla y escribirla en función de la variable original (X); es decir en la forma:

$$Y_i = b_o + b_1X_i + b_2X_i^2 + b_3X_i^3 + \ldots + b_kX_i^k + e_i$$

Se utilizan las relaciones que conectan las P_i con X_i; éstas son las siguientes:

$$P_{i1} = \delta_1[x_i]$$

$$P_{i2} = \delta_2\left[x_i^2 - \frac{n^2 - 1}{12}\right] \qquad x_i = \frac{X_i - \bar{X}}{I}$$

$$P_{i3} = \delta_3\left[x_i^3 - \frac{3n^2 - 7}{20}\, x_i\right]$$

Donde: δ_k = Coeficientes que se obtienen de tal manera que los coeficientes polinómicos resulten ser números enteros en su mínima expresión.

V. CALCULO DE LOS COEFICIENTES PARA POLINOMIOS ORTOGONALES.

Cuando no se cuentan con las tablas, es posible calcular los coeficientes ortogonales para la función lineal, cuadrática, cúbica, etc. A manera de ejemplo, calcularemos los coeficientes para polinomios de 1er, 2do, y 3er grado, cuando la variable independiente tiene cuatro niveles (n = 4).

a) Coeficientes para polinomios de 1er grado:

X codificado	P_{i1}' $(X + a_1)$
1	$1 + a_1$
2	$2 + a_1$
3	$3 + a_1$
4	$4 + a_1$

$$\Sigma P_{i1}' = 10 + 4a_1$$

Pero:

$$\Sigma P_{1k} = 0$$

Por tanto:

$$10 + 4a_1 = 0$$

Resolviendo, se tiene:

$$a_1 = -5/2$$

Reemplazando a_1 en la expresión original, se tiene:

P_{11}' $(X + a_1)$
$1 - 5/2 = -3/2$
$2 - 5/2 = -1/2$
$3 - 5/2 = 1/2$
$4 - 5/2 = 3/2$

Ahora se busca un valor δ_1 que multiplicado por los coeficientes hallados, permita encontrar los valores mínimos enteros; éste es:

$$\delta_1 = 2$$

utilizando la relación:

$$P_{11} = \delta_1 P_{11}'$$

se tiene:

P_{11}
- 3
- 1
1
3

b) Coeficientes para polinomios de 2do grado:

X codificado	P_{12}' $(X^2 + b_2X + a_2)$	$P_{11}P_{12}'$ $P_{11}(X^2 + b_2X + a_2)$
1	$1 + b_2 + a_2$	$-3 - 3b_2 - 3a_2$
2	$4 + 2b_2 + a_2$	$-4 - 2b_2 - a_2$
3	$9 + 3b_2 + a_2$	$9 + 3b_2 + a_2$
4	$16 + 4b_2 + a_2$	$48 + 12b_2 + 3a_2$
	$30 + 10b_2 + 4a_2$	$50 + 10b_2$

Pero:

$$\Sigma P_{1k} = 0$$

$$y \quad \Sigma P_{1k} \Sigma P_{1k}' = 0$$

Entonces:

$$50 + 10b_2 = 0$$

$$30 + 10b_2 + 4a_2 = 0$$

Resolviendo, se tiene:

$$a_2 = 5$$

$$b_2 = -5$$

Reemplazando a_2 y b_2 en la expresión original, se tiene:

P_{12}' $(X^2 + b_2X + a_2)$		P_{12}
1	ahora $\delta_2 = 1$	1
- 1	por tanto: $P_{12}' = P_{12}$	- 1
- 1	es decir:	- 1
1		1

c) **Coeficientes para polinomios de tercer grado**

X cod	P_{13}' $(X^3+c_3X^2+b_3X+a_3)$	$P_{11}P_{13}'$ $P_{11}(X^3+c_3X^2+b_3X+a_3)$	$P_{12}P_{13}'$ $P_{12}(X^3+c_3X^2+b_3X+a_3)$
1	$1+c_3+b_3+a_3$	$-3-3c_3-3b_3-3a_3$	$1+c_3+b_3+a_3$
2	$8+4c_3+2b_3+a_3$	$-8-4c_3-2b_3-a_3$	$-8-4c_3-2b_3-a_3$
3	$27+9c_3+3b_3+a_3$	$27+9c_3+3b_3+a_3$	$-27-9c_3-3b_3-a_3$
4	$64+16c_3+4b_3+a_3$	$192+48c_3+12b_3+3a_3$	$64+16c_3+4b_3+a_3$
---	-----------------	-------------------	-----------------
	$100+30c_3+10b_3+4a_3$	$208+50c_3+10b_3$	$30+4c_3$

Pero:

$$\Sigma P_{1k} = 0$$

y $$\Sigma P_{1k}\Sigma P_{1k}' = 0$$

Entonces:

$$30 + 4c_3 = 0$$
$$208 + 50c_3 + 10b_3 = 0$$
$$100 + 30c_3 + 10b_3 + 4a_3 = 0$$

Resolviendo, se tiene:

$$a_3 = -10.5$$
$$b_3 = 16.7$$
$$c_3 = -7.5$$

Reemplazando, se tiene:

P_{13}'		P_{13}
$-3/10$	luego:	-1
$9/10$	$\delta_3 = 10/3$, y	3
$-9/10$		-3
$3/10$		1

De esta manera, la tabla de coeficientes polinómicos cuando n = 4, será:

	1er grado	2do grado	3er grado
	- 3	1	- 1
	- 1	- 1	3
	1	- 1	- 3
	3	1	1
δ_k	2	1	10/3
ΣP_{ik}^2	20	4	20

Se dicen ortogonales porque la suma vectorial de estos coeficientes (ΣP_{ik}), para un polinomio cualquiera (primer grado, segundo grado, etc.), es cero; asimismo, el producto vectorial de los coeficientes correspondientes a dos polinomios ($\Sigma P_{ik}P_{ik}'$) también es cero, lo que quiere decir que forman un ángulo de 90º. En términos estadísticos esta propiedad implica que los polinomios son independientes (no correlacionan).

Se sugiere al usuario de este documento, comprobar estos coeficientes con los que figuran en otras tablas; además, a manera de práctica, calcular los coeficientes polinómicos de primer y segundo grado para n = 3 y n = 6.

SEGUNDA PARTE

LOS POLINOMIOS ORTOGONALES EN EL CONTEXTO DE UN DISEÑO EXPERIMENTAL

VI. ASPECTOS GENERALES.

En los capítulos anteriores se ha discutido sobre el uso de los polinomios ortogonales cuando se trabajan con valores promedio de Y correspondientes a cada nivel de la variable independiente (X), o cuando se cuenta con una sola observación. Habrá notado que el número de modelos polinómicos (respuestas) posibles a probar, es igual a dos grados menos (n - 2) que el número de niveles estudiados (n). Es decir, con tres niveles de un factor sólo se puede probar el efecto lineal; con cuatro niveles, las respuestas lineal y cuadrática; con cinco niveles, las respuestas lineal, cuadrática y cúbica.

En el contexto de un diseño experimental se utilizan todos los valores de Y; luego como se verá más adelante el número de respuestas posibles de probar es igual a un grado menos (n - 1) que el número de niveles estudiados (n). Así, con tres niveles de un factor, hay dos grados de libertad que pueden particionarse en uno, asociado con la respuesta lineal, y otro con la respuesta cuadrática. Como una curva de segundo grado o mayor siempre pasa por tres puntos puede ser más apropiado referirse a la última como asociada a una respuesta no lineal o con falta de ajuste a una respuesta lineal. Para cuatro niveles se cuenta con un grado de libertad más para estimar la respuesta cúbica; en este caso podría ser mejor referirse a la última como desviaciones de la respuesta cuadrática (STEEL y TORRIE, 1988). La idea consiste en desglosar los n - 1 GL de tratamientos estudiados en n - 1 pruebas aproximadamente independientes, una asociada con cada respuesta (lineal, cuadrática, etc.).

En investigaciones biológicas, sobre todo en las de carácter agronómico, es muy raro encontrar respuestas cuárticas o de mayor grado; por lo que al estudiar más de cuatro niveles de un factor, lo más común es probar las respuestas lineal, cuadrática y cúbica.

La suma de cuadrados de los contrastes permite probar cual es el grado apropiado del polinomio. Cada una de las SC se comprueba mediante el término de error, siendo la hipótesis nula que la media de la población para la comparación es cero, o que ß para el polinomio ortogonal particular es cero. Si solo el efecto lineal es significativo, se concluye que el incremento en la respuesta entre niveles sucesivos del factor es constante dentro de la variación aleatoria del orden del error experimental.

La respuesta puede ser positiva o negativa, según el aumento o disminución con los incrementos adicionales del factor. Un efecto cuadrático significante indica que una parábola se ajusta mejor a los datos; esto es, que explica significativamente más variación entre medias de tratamientos que una recta; es decir, el aumento o disminución por cada incremento adicional no es constante, sino que varía progresivamente (STEEL y TORRIE, 1988).

VII. POLINOMIOS ORTOGONALES EN DCA.

El siguiente ejemplo (tomado de FERREIRA y PIAGGIO, 1992) ilustra la aplicación de los polinomios ortogonales en el contexto de un Diseño Completamente al Azar (DCA). Se desea determinar la función polinomial que mejor represente la relación entre el % de vermicullita(X) y el % de humedad del substrato(Y); Para este estudio, el contenido de humedad (%) fue medido en cuatro substratos que se formaron agregando al suelo 0, 10, 20 y 30% de vermicullita, obteniéndose los resultados que se muestran en el cuadro 2.1.

Cuadro 2.1. % de humedad en substratos de suelo con cuatro niveles de vermicullita.

Repet. Trat (%)	0	10	20	30
1	9.8	10.2	12.3	13.3
2	13.4	12.4	11.7	12.8
3	10.2	13.1	12.8	13.2
4	10.6	12.2	13.6	14.1
5	9.4	11.5	13.1	14.2
Total	53.4	59.4	63.5	67.6

Solución:

La operación de rutina consiste en realizar el ANDEVA para determinar si hay diferencias entre tratamientos. Este resulta ser el siguiente (cuadro 2.2):

Cuadro 2.2. Análisis de varianza del porcentaje de humedad en sustratos Suelo-vermicullita.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.
tratamientos	3	22.0255	7.3418	6.355 **
error	16	18.4840	1.1553	
Total	19	40.5095		

Dado que existe diferencia estadística altamente significativa, es necesario descomponer los GL de tratamientos en tres modelos polinómicos (lineal, cuadrático y cúbico).

Recurriendo a la "tabla de polinomios ortogonales" del anexo, para n = 4, y utilizando los totales de cada tratamiento se tiene:

$Y_{i.}$	53.4	59.4	63.5	67.6	P_{ik}^2	* $C_k = \Sigma P_{ik}Y_{i.}$	SC(Ck) ** $C_k^2/\Sigma r_j P_{ik}^2$	*** $B_k = C_k/\Sigma r P_{ik}^2$
P_{i1}	-3	-1	1	3	20	$C1 = 46.7$	21.8089	$B1 = 46.7/5(20) = 0.467$
P_{i2}	1	-1	-1	1	4	$C2 = -1.9$	0.1805	$B2 = -1.9/5(4) = -0.095$
P_{i3}	-1	3	-3	1	20	$C3 = 1.9$	0.0361	$B3 = 1.9/5(20) = 0.019$

* $C_k = \Sigma P_{ik} Y_{i.}$

$C_1 = \Sigma P_{i1} Y_{i.} = (-3)(53.4)+(-1)(59.4)+(1)(63.5)+(3)(67.6) = 46.7$
$C_2 = \Sigma P_{i2} Y_{i.} = (1)(53.4)+(-1)(59.4)+(-1)(63.5)+(1)(67.6) = -1.9$
$C_3 = \Sigma P_{i3} Y_{i.} = (-1)(53.4)+(3)(59.4)+(-3)(63.5)+(1)(67.6) = 1.9$

** $SC(C_k) = C_k^2/\Sigma r P_{ik}^2$

$SC(C_1) = C_1^2/\Sigma r P_{i1}^2 = (46.7)^2/5(20) = 21.8089$
$SC(C_2) = C_2^2/\Sigma r P_{i2}^2 = (-1.9)^2/5(4) = 0.1805$
$SC(C_3) = C_3^2/\Sigma r P_{i3}^2 = (1.9)^2/5(20) = 0.0361$

*** $B_k = C_k/\Sigma r P_{ik}^2$

$B_1 = 46.7/5(20) = 0.467$
$B_2 = -1.9/5(4) = -0.095$
$B_3 = 1.9/5(20) = 0.019$

Ahora, el cuadro de ANDEVA que incluye el estudio de los modelos polinómicos para representar a las variables en estudio, es el siguiente (cuadro 2.3):

Cuadro 2.3. Análisis de varianza y estudio de modelos polinómicos del porcentaje de humedad en sustratos de Suelo con dosis crecientes de vermicullita.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.
tratamientos	3	22.0255	7.3418	6.355 **
F. lineal	1	21.8089	21.8089	18.878 **
F. cuadrática	1	0.1805	0.1805	0.156 ns
F. cúbica	1	0.0361	0.0361	0.03 ns
error	16	18.4840	1.1553	
Total	19	40.5095		

El ANDEVA indica respuesta lineal altamente significativa para los tratamientos de porcentaje de vermicullita. Esto se interpreta como un incremento del % de humedad del sustrato siguiendo una línea recta; en promedio el % de humedad del sustrato aumenta conforme aumenta el contenido de vermicullita.

Para graficar el polinomio, los valores estimados de Y ($\hat{Y}$) para cada valor de X, se pueden calcular fácilmente a partir del modelo codificado o del modelo real. Esto es:

El modelo codificado que representa a las variables en estudio, sería:

$$Y = B_o + B_1 P_{1i}$$

Donde: $B_o = \bar{Y} = \Sigma Y_i/n = 243.9/20 = 12.195$

$B_1 = \Sigma P_{1i} Y / r \Sigma P_{1i}^2 = 46.7/5(20) = 0.467$

es decir:

$$\mathbf{Y_1 = 12.195 + 0.467P_{11}}$$

reemplazando los valores de $\mathbf{P_{11}}$ correspondientes a cada nivel de vermicullita se determina los valores ajustados de $\hat{\mathbf{Y}}$.

$$Y_1 = 12.195 + 0.467(-3) = 10.794$$
$$Y_2 = 12.195 + 0.467(-1) = 11.728$$
$$Y_3 = 12.195 + 0.467(\ 1) = 12.662$$
$$Y_4 = 12.195 + 0.467(\ 3) = 13.596$$

Sin embargo, es mejor expresar el modelo en función de la variable original (X). Por tanto es necesario reemplazar.

$\mathbf{P_{11}}$ **por** $\mathbf{= \delta_1[(X_1 - \bar{X})/I]}$,

Es decir:

$$\mathbf{P_{11} = 2[(X_1 - 15)/10]}$$

$$P_{11} = 0.2X_1 - 3$$

Reemplazando en la ecuación codificada, se tiene:

$$Y_1 = 12.195 + 0.467(0.2X_1 - 3)$$

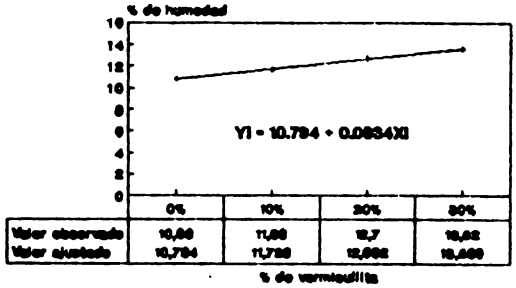
$$\mathbf{Y_1 = 10.794 + 0.0934X_1}$$

Los valores ajustados de $\hat{\mathbf{Y}}$, para los cuatro niveles estudiados (0, 10, 20, 30%), se obtienen reemplazando los valores de X correspondientes.

$$Y_1 = 10.794 + 0.0934(0) = 10.794$$
$$Y_2 = 10.794 + 0.0934(10) = 11.728$$
$$Y_3 = 10.794 + 0.0934(20) = 12.662$$
$$Y_4 = 10.794 + 0.0934(30) = 13.596$$

Si se compara los valores ajustados obtenidos con ambos modelos (codificado y real), se observa que éstos son los mismos. Esto sugiere que la representación gráfica del modelo puede realizarse con cualquiera de los dos modelos. Así:

fig 1. % de humedad (Y), en suelos con dosis crecientes de vermiculita (X)



VIII. POLINOMIOS ORTOGONALES EN DBA

Los datos que se muestran en el cuadro 2.4 (tomados de FERREIRA y PIAGGIO, 1992), corresponden a alturas medias de Cordia alliodora a los tres años de edad, sometidos a diferentes densidades de siembra. El experimento fue conducido en un diseño de Bloques completos al azar (DBA).

Cuadro 2.4. Altura (en metros) de árboles de *Cordia alliodora* de tres años de edad sometidas a cuatro densidades de siembra.

densidad (arb/ha)	altura (m) bloq. 1	bloq. 2	bloq. 3	bloq. 4
100	6.7	7.1	6.9	7.2
150	6.3	6.3	6.1	6.5
200	6.0	6.2	6.0	5.9
250	5.5	5.1	5.4	5.3

Se desea encontrar la función polinomial que mejor represente la relación entre la altura (Y) y la densidad (X).

Solución:

Como en el ejemplo anterior, en primer lugar se realiza el ANDEVA, para determinar la existencia de diferencias entre tratamientos. Este análisis se muestra en el cuadro 2.5.

Cuadro 2.5. Análisis de varianza de alturas medias (m) de *Cordia alliodora* de tres años de edad, sometida a cuatro densidades de siembra.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.	
bloque	3	0.036875	0.012292	0.34	ns
densidades	3	5.596875	1.865625	51.56	**
error	9	0.325625	0.03618		
Total	15	5.959375			

Dado que existe diferencia estadística altamente significativa, es necesario descomponer los GL de tratamientos en tres modelos polinómicos (lineal, cuadrático y cúbico), considerando a la última como desviación de la respuesta cuadrática.

Tomando los coeficientes polinómicos para n = 4, de la tabla del anexo y utilizando los totales de cada tratamiento, se tiene:

Yi.	27.9	25.2	24.1	21.3	Pik^2	* $Ck = \Sigma PikYi.$	SC(Ck) ** $Ck^2/\Sigma rjPik^2$	*** $Bk = Ck/\Sigma rPik^2$
Pi1	-3	-1	1	3	20	C1 = -20.9	5.460125	B1 =-20.9/4(20) =-0.26125
Pi2	1	-1	-1	1	4	C2 = - 0.1	0.000625	B2 = -0.1/4(4) = - ...
Pi3	-1	3	-3	1	20	C3 = -3.3	0.136125	B3 = -3.3/4(20) = - ...

$* \ C_k = \Sigma P_{ik} Y_{i.}$

$C_1 = \Sigma P_{i1} Y_{i.} = (-3)(27.9)+(-1)(25.2)+(1)(24.1)+(3)(21.3) = -20.9$

$C_2 = \Sigma P_{i2} Y_{i.} = (1)(27.9)+(-1)(25.2)+(-1)(24.1)+(1)(21.3) = -0.1$

$C_3 = \Sigma P_{i3} Y_{i.} = (-1)(27.9)+(3)(25.2)+(-3)(24.1)+(1)(21.3) = -3.3$

$** \ SC(C_k) = C_k^2 / \Sigma r P_{ik}^2$

$SC(C_1) = C_1^2 / \Sigma r P_{i1}^2 = (-20.9)^2 / 4(20) = 5.460125$

$SC(C_2) = C_2^2 / \Sigma r P_{i2}^2 = (-0.1)^2 / 4(4) = 0.000625$

$SC(C_3) = C_3^2 / \Sigma r P_{i3}^2 = (-3.3)^2 / 4(20) = 0.136125$

$*** \ B_k = C_k / \Sigma r P_{ik}^2$

$B_1 = -20.9/4(20) = -0.26125$

Por consiguiente, el cuadro de ANDEVA que incluye el estudio de los modelos polinomiales, es el siguiente (cuadro 2.6):

Cuadro 2.6. Análisis de varianza y estudio de modelos polinómicos de alturas medias de C. alliodora sometidas a cuatro densidades de siembra.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.
densidades	3	5.596875	1.865625	51.56 **
F. lineal	1	5.460125	5.460125	150.91 **
F. cuadrática	1	0.000625	0.000625	0.02 ns
F. cúbica	1	0.136125	0.136125	3.76 ns
error	9	0.325625	0.03618	

El ANDEVA indica respuesta lineal altamente significativa entre las diferentes densidades de siembra de C. alliodora. Esto se interpreta como una disminución de la altura de los árboles debido al aumento de la densidad de siembra, siguiendo una línea recta; en promedio el crecimiento (altura) de árboles disminuye conforme aumenta la densidad de plantación.

Los valores estimados de altura del árbol a los 3 años (Y) para cada densidad de siembra (X), se pueden calcular fácilmente a partir del modelo codificado o del modelo real. Esto es:

El modelo codificado que representa a las variables en estudio, sería:

$$Y = Bo + B_1P_{i1}$$

donde:

$$Bo = \bar{Y} = \Sigma Y_i/n = 98.5/16 = 6.15625$$

$$B_1 = \Sigma P_{i1}Y_i/r\Sigma P_{i1}^2 = -20.9/4(20) = -0.26125$$

es decir:

$$Y_i = 6.15625 - 0.26125P_{i1}$$

Sin embargo, es mejor expresar el modelo en función de la variable original (X). Por tanto es necesario reemplazar.

P_{i1} por $= \delta_1[(X_i - \bar{X})/I]$,

Es decir:

$$P_{i1} = 2[(X_i - 175)/50]$$

$$P_{i1} = 0.04X_i - 7$$

Reemplazando en la ecuación codificada, se tiene:

$$Y_i = 6.15625 - 0.26125(0.04X_i - 7)$$

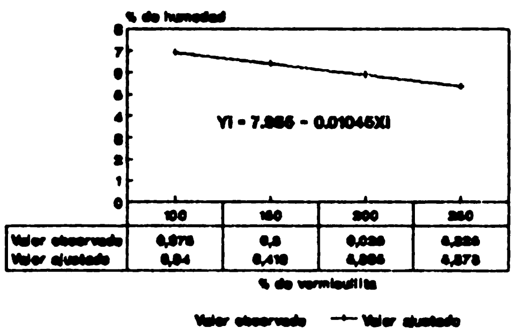
$$Y_i = 7.985 - 0.01045X_i$$

Los valores ajustados de Y, para los cuatro niveles estudiados (100, 150, 200, 250 plantas/hectárea), se obtienen reemplazando los valores de X correspondientes.

$$Y_1 = 7.985 - 0.01045(100) = 6.940$$
$$Y_2 = 7.985 - 0.01045(150) = 6.418$$
$$Y_3 = 7.985 - 0.01045(200) = 5.895$$
$$Y_4 = 7.985 - 0.01045(250) = 5.373$$

El gráfico correspondiente, se puede trazar con los valores ajustados; esto es:

fig 2. Altura (Y) de Cordia alliodora, según la densidad de siembra (X).



IX. POLINOMIOS ORTOGONALES EN UN EXPERIMENTO FACTORIAL.

El cuadro 2.7 adapatado de FERREIRA y PIAGGIO (1992), muestra los rendimientos (kg/parcela) obtenidos en un ensayo factorial con dos variedades de zanahoria a cuatro densidades de siembra, utilizando el DCA.

Cuadro 2.7. Rendimiento de materia seca (kg/parcela) de dos variedades de zanahoria (A y B), a cuatro densidades de siembra.

variedad	densidad (lb/acre)	repetición I	II	III
A	1.5	3.80	3.24	3.85
	2.0	4.36	3.80	4.17
	2.5	5.40	4.55	5.75
	3.0	4.70	3.70	4.50
B	1.5	2.82	3.14	3.80
	2.0	3.74	4.43	2.92
	2.5	4.32	4.90	4.50
	3.0	5.35	5.80	5.65

Se desea encontrar el modelo matemático que mejor represente la relación entre la producción de materia seca (Y) y la densidad de siembra (X).

Solución:

Como en los dos ejemplos anteriores, el primer paso consiste en realizar el ANDEVA de rutina. Este resultado se muestra en el cuadro siguiente:

Cuadro 2.8. Análisis de varianza del rendimiento de materia seca de zanahoria a cuatro densidades de siembra.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.	
Tratamiento	7	13.741029	1.963004	8.64	**
Variedad	1	0.008435	0.008435	0.04	ns
Densidad	3	10.083546	3.361182	14.79	**
Var.*Dens.	3	3.649046	1.216349	4.35	**
error	16	3.636867	0.227304		
Total	23	17.377895			

Los resultados del ANDEVA indican que no hay diferencias entre variedades, pero si entre densidades, además existe diferencia altamente significativa en la interacción variedad por densidad. Por tanto, es necesario realizar un estudio de efectos simples para conocer la variación del rendimiento de materia seca debido a las diferentes densidades de siembra en cada variedad de zanahoria.

Recurriendo a la técnica de los "polinomios ortogonales", y utilizando los totales de cada tratamiento, se tiene:

Variedad A						*	SC(Ck) **	***
Yi.	10.89	12.33	15.70	12.90	P_{ik}^2	$C_k = \Sigma P_{ik}Y_i.$	$C_k^2/\Sigma r_j P_{ik}^2$	$B_k = C_k/\Sigma r P_{ik}^2$
Pi1	-3	-1	1	3	20	C1 = 9.40	1.47267	B1 = 9.40/3(20) = 0.15667
Pi2	1	-1	-1	1	4	C2 = - 4.24	1.49813	B2 =-4.24/3(4) = -0.35333
Pi3	-1	3	-3	1	20	C3 = -8.10	1.09350	B3 = -3.3/3(20) = -0.13500

Variedad B						*	SC(Ck) **	***
Yi.	9.76	11.09	13.72	16.80	P_{ik}^2	$C_k = \Sigma P_{ik}Y_i.$	$C_k^2/\Sigma r_j P_{ik}^2$	$B_k = C_k/\Sigma r P_{ik}^2$
Pi1	-3	-1	1	3	20	C1 = 23.75	9.40104	B1 =23.75/3(20) = 0.39583
Pi2	1	-1	-1	1	4	C2 = 1.75	0.25521	B2 = 1.75/3(4) = 0.14583
Pi3	-1	3	-3	1	20	C3 = -0.85	0.01204	B3 =-0.85/3(20) =-0.01417

*, **, *** :

Se calculan como en el caso de los ejemplos anteriores. por ejemplo, para la variedad A de zanahoria, se tiene:

* $C_k = \Sigma P_{ik} Y_i.$:

$$C_1 = \Sigma P_{i1} Y_i. = (-3)(10.89)+(-1)(12.33)+(1)(15.7)+(3)(12.9) = 9.40$$

** $SC(C_k) = C_k^2/\Sigma r P_{ik}^2$: $SC(C_1) = (9.40)^2/3(20) = 1.47267$

*** $B_k = C_k/\Sigma r P_{ik}^2$: $B_1 = 9.40/3(20) = 0.15667$

De esta forma, el cuadro completo de ANDEVA será el siguiente (cuadro 2.9).

Cuadro 2.9. Análisis de varianza y estudio de modelos polinómicos del rendimiento de materia seca de zanahoria a cuatro densidades de siembra.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.	
Tratamiento	7	13.741029	1.963004	8.64	**
Variedad	1	0.008435	0.008435	0.04	ns
Variedad A					
F. lineal	1	1.47267	1.47267	6.48	*
F. cuadrát.	1	1.49813	1.498139	6.59	*
F. cúbica	1	1.09350	1.09350	4.81	*
Variedad B					
F. lineal	1	9.40104	9.40104	41.35	**
F. cuadrát.	1	0.25521	0.25521	1.12	ns
F. cúbica	1	0.01204	0.01204	0.05	ns
error	16	3.636867	0.227304		

El cuadro 2.9, indica la existencia de una respuesta cúbica para la variedad A, y respuesta lineal para la variedad B.

La construcción de los modelos para cada variedad, se dejan para el interesado como ejercicio.

X. POLINOMIOS ORTOGONALES EN UN DISEÑO DE PARCELAS DIVIDIDAS

El ejemplo que se muestra a continuación se ha tomado de Tineo (1993). Se desea encontrar el modelo polinomial que exprese el comportamiento reproductivo de tres especies de lombrices de tierra en un período de siete semanas de alimentación. Los resultados se muestran en el cuadro 2.10.

Cuadro 2.10. Producción de cápsulas por tres especies de lombrices de tierra, AYACUCHO, PERU, 1991.

ESPECIE / FECHA	L. Andahuayl.			E. foétida			R. Ayacuchana		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
30-07-91	3	7	5	1	1	0	2	2	2
06-08-91	24	26	30	6	4	3	3	3	7
13-08-91	23	26	30	11	16	21	11	10	9
20-08-91	18	21	20	18	14	19	7	8	6
27-08-91	12	21	15	16	11	15	7	2	10
03-09-91	1	6	1	2	3	4	0	0	1
10-09-91	0	1	0	4	1	2	1	0	0

Solución:

Como puede observarse, las evaluaciones de la producción de cápsulas por las lombrices se han realizado semanalmente. Esta estructura correponde a un arreglo de "Parcelas Divididas en el Tiempo", por lo que su análisis debe ser tratado en esa forma.

En primer lugar se realiza el ANDEVA ordinario. Los resultados de éste se muestran en el cuadro 2.11.

Cuadro 2.11. **Análisis de varianza de la producción de cápsulas por tres especies de lombrices de tierra en siete semanas de crianza.**

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.
Especie	2	953.7460317	476.8730159	36.95 **
error (a)	6	77.428571	12.904762	
Fecha	6	2463.777778	410.629630	83.72 **
Esp.*Fecha	12	927.365079	77.280423	15.76 **
error (b)	36	176.5714	4.90476	
Total	62	4598.8889		

En vista de que se ha encontrado respuesta altamente significativa en la interacción especie por fecha, se realiza el estudio de efectos simples de fechas dentro de cada especie.
Así se encontrará el modelo polinomial de la producción de cápsulas para cada especie de lombriz de tierra.

De la tabla de "polinomios ortogonales" del anexo, se obtiene los coeficientes para n = 7. Con los totales de cada fecha en cada una de las especies, se realizan cálculos similares al de los ejemplos anteriores.

Linda Andahuaylina									*	SC(Ck) **	***
Yi.	15	80	79	59	48	8	1	Pik²	Ck = ΣPikYi.	Ck²/ΣrjPik²	Bk = Ck/ΣrPik²
Pi1	-3	-2	-1	0	1	2	3	28	C1 = - 217	560.5833	B1 = -217/3(28) =-2.58333
Pi2	5	0	-3	-4	-3	0	5	84	C2 = - 537	1144.3214	B2 = -537/3(84) =-2.13095
Pi3	-1	1	1	0	-1	-1	1	6	C3 = 89	440.0556	B3 = 89 /3(6) = 4.94444

Eisenia foetida

Yi.	2	13	48	51	42	9	7	Pik²	* Ck = ΣPikYi.	** SC(Ck) Ck²/ΣrjPik²	*** Bk = Ck/ΣrPik²
Pi1	-3	-2	-1	0	1	2	3	28	C1 = 1	0.0119	B1 = 1 /3(28) = 0.01190
Pi2	5	0	-3	-4	-3	0	5	84	C2 = - 429	730.3214	B2 = -429/3(84) =-1.70238
Pi3	-1	1	1	0	-1	-1	1	6	C3 = 15	12.5000	B3 = 15 /3(6) = 0.83333

Roja Ayacuchana

Yi.	6	13	30	21	19	1	1	Pik²	* Ck = ΣPikYi.	** SC(Ck) Ck²/ΣrjPik²	*** Bk = Ck/ΣrPik²
Pi1	-3	-2	-1	0	1	2	3	28	C1 = - 50	29.7619	B1 = -50 /3(28) =-0.59524
Pi2	5	0	-3	-4	-3	0	5	84	C2 = - 196	152.4444	B2 = -196/3(84) =-0.77778
Pi3	-1	1	1	0	-1	-1	1	6	C3 = 18	18.0000	B3 = 18 /3(6) = 1.00000

*, **, *** :

Se calculan como en los ejemplos anteriores. Así por ejemplo, para la Especie Eisenia foetida:

* $C_k = \Sigma P_{ik} Y_{i.}$:

$C_1 = \Sigma P_{i1} Y_{i.} =$
$(-3)(2)+(-2)(13)+(-1)(48)+(0)(51)+(1)(42)+(2)(9)+(3)(7) = 1$

** $SC(C_k) = C_k^2/\Sigma r P_{ik}^2$:

$SC(C_1) = (1)^2/3(28) = 0.01190$

*** $B_k = C_k/\Sigma r P_{ik}^2$:

$B_1 = 1/3(28) = 0.01190$

Ahora, el cuadro completo de ANDEVA será el siguiente:

Cuadro 2.12. Análisis de varianza y estudio de modelos polinómicos de la producción de cápsulas por tres especies de lombrices de tierra en siete semanas de crianza.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	Fc.
Especie	2	953.7460317	476.8730159	36.95 **
error (a)	6	77.428571	12.904762	
Fecha	6	2463.777778	410.629630	83.72 **
Esp.*Fecha	12	927.365079	77.280423	15.76 **
Linda Andahuaylina				
Lineal/L.A.	1	560.583333	560.583333	114.29 **
Cuadrt/L.A.	1	1144.321429	1144.321429	233.31 **
Cúbica/L.A.	1	440.055556	440.055556	89.72 **
Eisenia foetida				
Lineal/E.f.	1	0.011905	0.011905	0.00 ns
Cuadrt/E.f.	1	730.321429	730.321429	148.90 **
Cúbica/E.f.	1	12.500000	12.500000	2.55 ns
Roja Ayacuchana				
Lineal/R.A.	1	29.761905	29.761905	6.07 *
Cuadrt/R.A.	1	152.444444	152.444444	31.08 **
Cúbica/R.A.	1	18.000000	18.000000	3.67 ns
error (b)	36	176.5714	4.90476	

El cuadro 2.15, indica que el rítmo de producción de cápsulas por la lombriz de tierra, obedece a un modelo cúbico en la Linda Andahuaylina; mientras que en la Eisenia foetida y Roja Ayacuchana se ajustan mejor a una función cuadrática.

La construcción de los modelos para cada especie, se dejan como ejercicio.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, R.; BANCROFT, T. 1952. Statistical theory in research. McGraw Hill, New York. 399 p.

ANDERSON, V.; McLEAN, R. 1974. Design of experiments, a realistic approach. Marcel Dekker inc, New York. 418 p.

DAMON, R.; HARVEY, W. 1987. Experimental design, ANOVA and Regression. Harper & Row publishers, New York. 508 p.

GOMEZ, K. A.; GOMEZ, A. A. 1976. Statistical procedures for agricultural research with enphasis on rice. IRRI, Los Baños, Filipinas. 294 p.

LITLE, T.; HILLS, F. 1983. Métodos estadísticos para la investigación en la agricultura. Ed. Trillas, México. 270 p.

FERREIRA, P.; PIAGGIO, G. 1992. Diseño experimental (apuntes de clase). CATIE, Turrialba, Costa Rica. s/n p.

SNEDECOR, G.; COCHRAM, W. 1982. Métodos estadísticos. ed. CECSA, México. 703 p.

STEEL, R.; TORRIE, J. 1988. Bioestadística; Principios y procedimientos. Libros McGraw Hill, México. 622 p.

TINEO, A.; TINEO, J.; IBAÑEZ, R. 1988. Los polinomios ortogonales y su aplicación en la investigación agrícola y pecuaria. UNSCH, Ayacucho, Perú. 20 p.

TINEO, A. 1993. Estudio preliminar de algunos aspectos reproductivos de tres especies de lombriz de tierra, Ayacucho, Perú. TCCS-FCA-UNSCH. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Perú. s/n p.

A N E X O

TABLA DE COEFICIENTES PARA POLINOMIOS ORTOGONALES

	n = 3		n = 4			n = 5			
	P_{i1}	P_{i2}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}
	-1	+1	-3	+1	-1	-2	+2	-1	+1
	0	-2	-1	-1	+3	-1	-1	+2	-4
	+1	+1	+1	-1	-3	0	-2	0	+6
			+3	+1	+1	+1	-1	-2	-4
						+2	+2	+1	+1
ΣP_{ik}^2	2	6	20	4	20	10	14	10	70
δ_k	1	3	2	1	10/3	1	1	5/6	35/12

	n = 6					n = 7				
	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}	P_{i5}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}	P_{i5}
	-5	+5	-5	+1	-1	-3	+5	-1	+3	-1
	-3	-1	+7	-3	+5	-2	0	+1	-7	+4
	-1	-4	+4	+2	-10	-1	-3	+1	+7	-5
	+1	-4	-4	+2	+10	0	-4	0	+6	0
	+3	-1	-7	-3	-5	+1	-3	-1	+1	+5
	+5	+5	+5	+1	+1	+2	0	-1	-7	-4
						+3	+5	+1	+3	+1
ΣP_{ik}^2	70	84	180	28	252	28	84	6	154	84
δ_k	2	3/2	5/3	7/12	21/10	1	1	1/6	7/12	7/20

	n = 8					n = 9				
	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}	P_{i5}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}	P_{i5}
	+1	-5	-3	+9	+15	0	-20	0	+18	0
	+3	-3	-7	-3	+17	+1	-17	-9	+9	+9
	+5	+1	-5	-13	-23	+2	-8	-13	-11	+4
	+7	+7	+7	+7	+7	+3	+7	-7	-21	-11
						+4	+28	+14	+14	+4
ΣP_{ik}^2	168	168	264	616	2184	60	2772	990	2002	468
δ_k	2	1	2/3	7/12	7/10	1	3	5/6	7/12	3/20