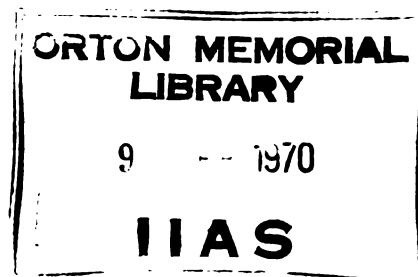


ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SÔBRE O MODÉLO DE
RESPOSTA A FERTILIZANTES

Tese de Grau de *Magister Scientiae*

Sadi Sérgio Grimm



INSTITUTO INTERAMERICANO DE CIENCIAS AGRICOLAS DE LA OEA
Centro de Ensino e Pesquisa
Departamento de Desenvolvimento Rural
Turrialba, Costa Rica
Janeiro, 1970

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO DE
RESPOSTA A FERTILIZANTES

Tese

Apresentada ao Conselho da Escola para Graduados
como requisito parcial para obter o grau

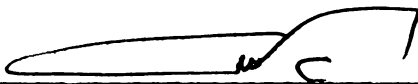
de

Magister Scientiae

no

Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas da OEA

APROVADA:



Gilberto Páez, Ph.D.

Conselheiro



Ellis G. Knox, Ph.D.

Comitê



Hans W. Fassbender, Ph.D.

Comitê



Fausto Maldonado, Eng. Agr^o.

Comitê

À memória de minha mãe

Ao meu pai

Aos meus irmãos

À Hiltrudis

AGRADECIMENTO

Ao Conselheiro Principal, Dr. Gilberto Páez, pela orientação constante e segura prestada ao autor na elaboração dēste trabalho.

Ao Dr. Hans Fassbender, pelas sugestões e pela orientação brindada na parte de análises químicas e pelas facilidades proporcionadas na obtenção de dados.

Aos demais membros do seu Comitê Conselheiro, Dr. Ellis Knox e Eng. Agrº. Fausto Maldonado, por seu apoio, sugestões e criterioso julgamento da tese.

Aos colegas e amigos, bem como a direção da ACARESC, que com seu estímulo e apoio facilitaram a consecução dēste trabalho.

A Rotary Foundation e ao Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas, cujas bōlsas de estudo permitiram ao autor a realização de estudos pós-graduados.

A Sra. Mireya Sánchez de Vega, por seu eficiente trabalho de datilografia da tese.

BIOGRAFIA

O autor nasceu na cidade de Ijuí, Estado do Rio Grande do Sul, Brasil, em 11 de março de 1943.

Realizou seus estudos universitários na Faculdade de Agronomia e Veterinária da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, graduando-se Engenheiro Agrônomo em 1966.

No ano de 1967 foi contratado pela Associação de Crédito e Assistência Rural do Estado de Santa Catarina (ACARESC) para exercer o cargo de extensionista rural no Município de Xanxerê.

Em setembro de 1968, ingressou no Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas da OEA para estudos de pós-graduação, permanecendo até janeiro de 1970.

CONTÉUDO

	<u>Página</u>
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. O problema	2
1.2. Objetivos	4
2. REVISÃO DE LITERATURA	5
3. MATERIAIS E MÉTODOS	18
3.1. Justificação matemática das funções de produção com um fator insumo	18
3.1.1. Lei do mínimo ou Lei de Liebig (1862)	18
3.1.2. Lei dos rendimentos decrescentes ou Lei de Mitscherlich (1909)	21
3.1.3. Lei da resposta parabólica ou polinômio de Segunda Ordem	25
3.1.4. Lei da função de potência (Cobb - Douglas) ..	29
3.1.5. Lei da resposta exponencial	32
3.2. Método de ajustamento das curvas	34
3.2.1. Estimacão de parâmetros em modelos lineares pelo método de mínimos quadrados	34
3.2.2. Estimacão de parâmetros não-lineares pelo mé- todo de mínimos quadrados	38
3.3. Estimacão de máximos nas funções de produção	41
3.3.1. Estimacão de máximo na função de Mitscherlich	41
3.3.2. Estimacão de máximo na função de Cobb-Douglas	43
3.3.3. Estimacão de máximo na função exponencial ...	44
3.3.4. Estimacão de máximo na função quadrática	45
3.3.5. Estimacão de máximo na função de raiz quadra- da	45
3.4. Determinacão da dose ótima de fertilizante	46
3.5. Descriçao dos dados experimentais e análises químicas realizadas no laboratório	47
3.6. Descriçao do solo da área experimental	49
4. RESULTADOS	51
4.1. Estimacão da curva de resposta em função do adubo aplicado	52

	<u>Página</u>
4.2. Influência da introdução da fertilidade inicial do solo (determinada por análise química) sobre a curva de resposta	56
4.3. Estimação da fertilidade inicial do solo por meio da função de resposta	62
4.4. Alterações causadas na dose que maximiza a resposta ao considerar na função a fertilidade inicial do solo	66
4.5. Estimação da máxima resposta	67
4.6. Correlação existente entre a quantidade de nutriente nativo do solo, estimada matematicamente e por análise química	70
5. DISCUSSÃO	72
6. CONCLUSÕES	77
RESUMO	79
RESUMEN	82
SUMMARY	85
LITERATURA CITADA	88
APÊNDICES	92

RELAÇÃO DE QUADROS

Quadro Nº		<u>Página</u>
1	Ajustamento da função quadrática aos dados experimentais $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$	52
2	Ajustamento da função de raiz quadrada aos dados experimentais $Y = \beta_0 + \beta_1 X^{1/2} + \beta_2 X$	53
3	Ajustamento da função de Cobb-Douglas aos dados experimentais $Y = \beta_0 X^{\beta_1}$	54
4	Influência da fertilidade inicial do solo, determinada por análise química, sobre o ajustamento da função quadrática	57
5	Influência da fertilidade inicial do solo, determinada por análise química, sobre o ajustamento da função de raiz quadrada	60
6	Conteúdo inicial de P_2O_5 no solo em kg/ha ($\hat{\delta}$), estimado pela função quadrática $Y = \beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2$	62
7	Conteúdo inicial de P_2O_5 no solo em kg/ha (δ), estimado através do ajustamento da função de raiz quadrada $Y = \beta_1 (X + \delta)^{1/2} + \beta_2 (X + \delta)$...	63
8	Variâncias e Covariâncias assintóticas dos estimados de alguns parâmetros	65
9	Doses de P_2O_5 (kg/ha) a aplicar para obter a máxima resposta no caso das funções quadrática e de raiz quadrada, quando não se considera a fertilidade inicial do solo ($\hat{\delta}_n$) e quando se introduz na equação este parâmetro, estimado matematicamente ($\hat{\delta}_m$) e por quatro métodos de análise química.....	68
10	Produções máximas estimadas (kg/ha de açúcar), em cada repetição, pelas funções quadrática e raiz quadrada	69
11	Matriz de correlações (\hat{R}) entre os valores de P_2O_5 nativo do solo, determinados através de dois modelos de resposta: quadrático (Q) e raiz quadrada (RQ); e por quatro métodos de análise química: Egner-Riehm (ER), Bray 1 (B), Mehlich (M) e Olsen (OL)	70

RELAÇÃO DE FIGURAS

Figura Nº		<u>Página</u>
1	Representação gráfica da Lei do Mínimo	19
2	Representação gráfica da Lei de Mitscherlich.	21
3	Representação gráfica da Lei da Resposta Parabólica	26
4	Representação gráfica da Função de Cobb-Douglas	30
5	Representação gráfica da Lei da Resposta Exponencial	32
6	Representação gráfica das curvas de resposta em função do fertilizante aplicado, no caso da repetição R 2.	55
7	Representação gráfica da estimação da fertilidade inicial do solo por meio do ajustamento da curva de resposta para o total das repetições R.	64

1. INTRODUÇÃO

A produção é um processo no qual alguns bens e serviços chamados insumos se transformam em outros denominados produtos. Daí se pode concluir que a produção de uma empresa depende da quantidade e do tipo de insumos utilizados. O objetivo primordial de uma empresa agrícola, bem como de qualquer outro tipo de empresa, é o lucro. Logo podemos afirmar que a função do administrador rural é combinar os insumos de maneira a obter uma produção que maximize os lucros da empresa. Na agricultura, os fertilizantes podem ser situados entre os insumos de maior importância devido a sua reconhecida capacidade de influenciar a produção.

Nos países da América Latina, a maioria dos técnicos ao fazer recomendações sobre aplicação de adubos baseia-se nas deficiências nutritivas do solo, determinadas na maioria dos casos por análises químicas ou experimentos de campo, e na quantidade de nutrientes requeridos pela cultura para produzir uma determinada colheita, sem dar muita importância ao aspecto econômico. Outro fato a considerar é o uso indiscriminado de métodos de análise química do solo sem que se haja selecionado o método mais apropriado e realizado uma calibração criteriosa do mesmo, para os solos da região. Como consequência de tais fatos, o técnico, na maioria das vezes, recomenda doses de adubo inadequadas e o agricultor perde dinheiro por aplicar uma dose excessiva de fertilizante ou deixa de aumentar o seu lucro por usar uma dose de adubo inferior à economicamente recomendável, a qual lhe maximizaria o lucro.

Atualmente os técnicos estão se despertando para tais problemas e buscam uma metodologia que lhes permita fazer recomendações

de adubação mais precisas e confiáveis. Provavelmente o primeiro passo seria a seleção e calibração do método de análise química do solo, porém, até o momento, não existe uma técnica geral de calibração, por tal razão é necessário estabelecer um modelo matemático que descreva mais realisticamente a relação entre o rendimento do cultivo, a dose de nutriente aplicada em forma de adubo e a quantidade de nutriente existente no solo em forma assimilável às plantas. Entretanto, muito pouca atenção se tem dado a este último (nutriente existente no solo), quando existe a possibilidade de estimar matematicamente este parâmetro. Por outro lado, o cálculo das doses de nutrientes necessárias para maximizar o lucro se torna relativamente fácil se conseguimos ajustar uma função que, dentro de certos limites de confiança, descreva a relação entre insumo e produto. A função que descreve essa relação recebe o nome de modelo de resposta a fertilizantes e constitui o objeto deste estudo.

1.1. O problema

Muitos tipos de equações algébricas podem ser usados para derivar as funções de produção. A mesma forma não pode ser usada para caracterizar a produção agrícola baixo diferentes condições ambientais. A forma algébrica da função e a magnitude de seus coeficientes variará com o solo, o clima, o tipo e variedade de cultivo, etc. (25). Portanto, um problema em cada estudo é a seleção de uma forma algébrica da função que seja consistente com o fato prático. Uma orientação sobre formas apropriadas pode provir de pesquisas prévias e de teorias envolvidas no estudo. A seleção de qualquer

tipo específico de função para expressar o fenômeno da produção, automaticamente impõe certas restrições ou suposições com respeito às relações envolvidas e às quantidades ótimas de insumo que serão especificadas.

Alguns pesquisadores não tomam em consideração os nutrientes inicialmente existentes no solo; entretanto a função de resposta que considera somente o adubo aplicado está incompleta. Portanto, é interessante avaliar o efeito do nutriente existente no solo e aquele adicionado em forma de adubo sobre o crescimento das plantas. Para separar estes dois efeitos é necessário determinar a quantidade de nutrientes disponíveis ao cultivo existentes no solo, visto que a dose de fertilizante aplicada é conhecida. Aparentemente, existem dois métodos para determinar o total de nutrientes disponíveis ao cultivo, existentes no solo: o primeiro seria por determinação direta através do ajustamento da curva de resposta e o segundo seria por análise química do solo. A exatidão do valor determinado matematicamente dependerá do ajustamento da curva em relação aos dados experimentais, ao passo que a exatidão do valor determinado por análise química dependerá do método usado, isto supondo que a amostra do solo foi bem colhida e que os erros de laboratório estejam dentro de limites aceitáveis. Assim, após o ajustamento da função de resposta, o problema consistiria em selecionar o método de análise química mais apropriado para a região, isto é, aquele que proporciona os resultados que melhor se correlacionam com os valores determinados matematicamente a partir do modelo de resposta. A seguir seria indispensável calibrar o método selecionado estabele-

cendo critérios de interpretação para os valores determinados por análise química. Nesta parte seria de grande valor o conhecimento da quantidade de nutriente existente no solo em forma assimilável às plantas, que serviria como termo de comparação para a avaliação dos valores determinados por análise química. A estimação matemática do parâmetro "conteúdo inicial de nutriente no solo" através da função de resposta nos forneceria esse termo de comparação para a calibração do método de análise química selecionado.

1.2. Objetivos

- 1) Intentar a seleção da forma de função de produção que melhor se ajuste aos dados experimentais.
- 2) Determinar a dose de adubo que maximiza a resposta e estudar sua relação com a dose economicamente recomendável.
- 3) Estudar as alterações causadas na dose que maximiza a resposta ao considerar na equação a quantidade de nutriente existente no solo, determinada matematicamente e por análise química.
- 4) Verificar a correlação existente entre a quantidade de nutriente existente no solo, determinada matematicamente e por análise química do solo.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Heady e Dillon (25) consideram a "lei do mínimo" de Justus Von Liebig como a primeira tentativa para definir a relação entre o adubo aplicado e os rendimentos de um cultivo. Liebig estabeleceu que um solo contendo todos os nutrientes necessários para o crescimento da planta, exceto um, é estéril para todos os cultivos para os quais o nutriente ausente é indispensável. Ele acreditava que os rendimentos de um cultivo eram proporcionais a quantidade de nutrientes aplicados ou provistos pelo solo, e que quando todos os nutrientes estavam presentes no solo em quantidades suficientes, a adição de um ou mais nutrientes não incrementaria o rendimento. Liebig não sugeriu equações algébricas para representar seu conceito sobre a função de produção para cultivos, porém a forma algébrica involucrada é sobretudo óbvia. Cada nutriente atuaria como um fator limitante para os demais. A função de produção se reduziria a uma regressão linear com um incremento constante na produção por hectare para cada unidade de adubo aplicada. Em geral este tipo de função de produção tem sido desaprovado. Entretanto, a maioria das funções de produção provavelmente tem um "ponto de Liebig" onde todos os nutrientes são limitantes e a adição de qualquer um deles não aumenta a produção. Este "ponto de Liebig" corresponde ao pico da superfície de resposta onde as linhas de isocusto convergem e a curva de iso-resposta que define esta produção se reduz a um ponto. Baule sugere que a lei do mínimo de Liebig supunha que as plantas absorviam os nutrientes somente em uma dada relação e que o rendi-

mento variaria diretamente com a quantidade disponível do nutriente existente em menor quantidade. Heady e Dillon (25) declaram que Bondorff e Plessing interpretaram essa lei como representada pela forma algébrica

$$Y = a X \quad (2.1)$$

onde Y é a produção, X é a quantidade do nutriente, e a é a constante ou coeficiente que define a relação de transformação. Boresch, citado por Heady e Dillon (25), considera que a lei de Liebig pode ser representada como

$$Y = c + a X \quad (2.2)$$

onde Y é a produção total, c é o nível de produção em ausência de aplicação de X, o nutriente adicionado. A extensão destes conceitos para mais de um nutriente, no caso da equação (2.1), a função para três nutrientes seria $Y = a X_1 X_2 X_3$ e a produção seria proporcional a aplicação de qualquer fertilizante. A produção seria zero na ausência de qualquer um dos três nutrientes. Entretanto, esta forma algébrica não definiria diretamente a produção máxima discutida por Liebig.

A primeira tentativa mais realística para definir a natureza algébrica da função de produção adubo-cultivo foi aquela de Mitscherlich em 1909, conforme afirmam Heady e Dillon (25). Ele foi talvez, o primeiro agrônomo a sugerir uma função de produção não linear para relacionar a aplicação de adubo com a produção do cultivo. Com a colaboração de Baule, um matemático, para explicar a resposta a fertilizante ele propôs a equação

$$Y = A \left(1 - 10^{-c(X + \delta)} \right) \quad (2.3)$$

que também poderia obter-se de uma simples equação diferencial da forma $\frac{dY}{dX} = c (A - Y)$. Na equação (2.3), A é a produção máxima teórica quando se aumenta indefinidamente a dose de um nutriente, X, e c é uma constante de proporcionalidade, definindo o valor no qual a produção marginal declina. Uma objeção à equação de Mitscherlich era de que não dava produtos marginais negativos, ou produções totais decrescentes. Em consequência, Mitscherlich realizou uma adaptação para permitir esta condição. A equação adaptada pode ser escrita como

$$Y = \left(1 - 10^{-cX} \right) \left(10^{-kX^2} \right) \left(10^c \right) \quad (2.4)$$

onde k é um fator de perda devido a doses excessivas de X.

Mitscherlich considerava o coeficiente c constante para todos os cultivos, não sendo afetado pelo tipo de cultivo, solo, clima ou outros fatores ambientais. Entretanto, diversos autores (2, 6, 7, 34, 35) tem publicado trabalhos que expressam a variabilidade de c. Bray (7) postula que c pode ser constante para uma forma de nutriente do solo relativamente imóvel, se certos fatores de crescimento não variam. Lavollay, citado por Sánchez de la Puente (35), indica que o valor c, de um nutriente dado, varia se variam os nutrientes que guardam relação fisiológica com este, mas não com os outros nutrientes. Por outra parte, Van Der Paauw (40), estudando o método estatístico aplicado por Mitscherlich - Willcox (43) - encontra melhores ajustes com outros valores de c, distintos dos assinalados por Mitscherlich.

Sánchez de la Punte (36), aplicando a equação de Mitscherlich a diversos experimentos de campo, constatou que os parâmetros da equação (A, δ , c) variam com o tipo de solo, a planta cultivada, a forma química do nutriente existente no solo e as condições climáticas. Malavolta (29) afirma que c varia de acordo com o cultivo, o clima e o tipo de solo.

A lei de Mitscherlich tem sido estudada por inúmeros pesquisadores. No Brasil destacam-se os trabalhos realizados por Pimentel Gomes e seus colaboradores (19, 20, 21, 22). Pimentel Gomes e Abreu (21) criaram, a partir da equação de Mitscherlich, uma fórmula para o cálculo da dose mais econômica de adubo:

$$X = \left(\frac{1}{2}\right) X_u + \left(\frac{1}{c}\right) \log \frac{wu}{tX_u} \quad (2.5)$$

onde u é o aumento de produção do produto agrícola, obtido com a dose X_u do nutriente, w é o preço unitário desse produto agrícola, pago ao agricultor, t é o preço unitário do nutriente e c é o coeficiente de eficácia.

Bray (5), reconhecendo que as formas originais do solo e o nutriente aplicado como adubo poderiam possuir diferentes coeficientes de eficácia, modificou a equação original de Mitscherlich para

$$Y = A \left(1 - 10^{-c_1 \delta - cX}\right) \quad (2.6)$$

onde c_1 e c são os coeficientes de eficácia de δ , nutriente do solo, e de X, nutriente adicionado como adubo. Para δ , Bray usou o valor determinado por análise química do solo (8) ao passo que Mitscherlich usou a equação para calcular δ em termos de unidades de adubo adicionado ao solo. Ranganathan et al. (34), em trabalho publicado

recentemente, chegaram à conclusão de que o conceito de Mitscherlich - Bray pode ser usado com sucesso nos estudos sobre funções de resposta dos cultivos e que as desviações dos parâmetros não devem ser atribuídas à falha desse conceito, mas como uma indicação da intervenção de outros fatores limitantes.

Trabalhando independentemente e sem o conhecimento do trabalho realizado por Mitscherlich, Spillman (38) propôs uma função de produção exponencial, que essencialmente é aquela de Mitscherlich. A função de produção total de Spillman é

$$Y = M - AR^X \quad (2.7)$$

onde M é a produção máxima teórica quando se aumenta indefinidamente a dose de um nutriente, X, A é uma constante que define a máxima resposta atingível pelo uso de X, e R é o coeficiente que define a relação pela qual a produtividade marginal de X declina. Spillman desenvolveu esta equação após examinar resultados de experimentos de adubação de algodão em Carolina do Norte. Ao contrário de Mitscherlich, ele acreditava que as constantes na função de produção variavam com as condições ambientais. Na equação (2.7), a produção total atingível pode ser definida como $M = Y_0 + Y$ onde Y_0 é a produção total quando $x = 0$ e Y é o aumento na produção correspondente a vários valores de X. Portanto podemos definir a produção futura na ausência do nutriente variável ($x = 0$) como $Y_0 = M - A$ enquanto a adição na produção é $Y = A (1 - R^X)$. Usando estes componentes, a produção total é $Y = Y_0 + Y = M - A + A (1 - R^X) = M - AR^X$, conforme foi indicado na função (2.7). O termo $1 - R^X$ pode ser definido

como proporção da fração de suficiência. Se X é zero, a resposta também é zero. Como X aumenta em magnitude, a fração $1 - R^X$, ou a percentagem representada por ela, declina e a resposta aproxima-se do limite matemático A. Portanto a curva de insumo-produto é assintótica para A quando a medição é de resposta à variável mais o resultado proveniente de insumos fixos.

Segundo relatam Heady e Dillon (25), Baule ampliou a equação de Mitscherlich para incluir n variáveis. Sua equação era baseada no conceito de "percentagem de suficiência" para nutrientes individuais. Baseado no trabalho de Baule, Spillman (38) desenvolveu a equação

$$Y = A (1 - R^X) (1 - R^Z) \quad (2.8)$$

onde Y é a resposta para insumos variáveis, A é a produção máxima teórica, R é a relação das séries de incrementos na produção para sucessivos incrementos unitários de X e Z; o tamanho da unidade em cada caso sendo tal como para fazer $R = 0,8$. Para esta função as variáveis servem como fatores limitantes para magnitude zero de cada uma, pois que $1 - R^0 = 0$.

Pfeiffer e Frölich são citados por Heady e Dillon (25) por ter usado em 1912 um polinômio de segundo grau de uma só variável para descrever a relação entre a produção e o suprimento de nitrogênio. Panse (31) usou uma equação desse tipo para representar dados de produção de algodão. Briggs, citado por Heady e Dillon (25), sugeriu o uso de uma função hiperbólica

$$Y = \frac{(X + \delta) E}{X + \delta + h} \quad (2.9)$$

onde E é a produção máxima teórica, δ é a quantidade de X existente no solo e h é a dose ótima de insumo. Heady e Dillon (25) declaram que funções similares de tipo hiperbólico foram sugeridas por Boresch, Balmukand, Baule e Bondorff. Thelau é também citado por sugerir uma função elíptica para caracterizar a resposta de cultivos à aplicação de fertilizantes.

Crowther e Yates (16) analisaram experimentos de adubação realizados na Gran Bretanha entre 1900 e 1941, bem como experimentos similares realizados na Europa, como base para a formulação de uma política para fertilizantes durante o tempo da guerra. Eles enfatizaram que as conclusões finais sobre resposta a fertilizantes poderiam basear-se numa série de experimentos realizados em anos diferentes, com diferentes culturas e baixo situações variáveis de lugar e solo. A função usada para algumas das estimativas era $Y = Y_0 + d (1 - 10^{-kX})$, uma modificação da fórmula de Mitscherlich, onde Y_0 é a produção sem adubo, d é o limite da resposta, X é a dose de nutriente aplicada, e k é um valor constante para cada nutriente. Os valores médios de k , determinados para os experimentos britânicos, eram 1,1 para nitrogênio, 0,8 para fósforo, 0,8 para potássio e 0,4 para estêrco. Os autores parecem sugerir que estes valores de k são constantes para diferentes lugares e condições. A equação de Mitscherlich, modificada por Crowther e Yates, também foi usada por Carey e Robinson (11) e Hodnett (28) para descrever a resposta a fertilizantes em cultivo de cana de açúcar.

Hagin (23) declara que Putter adaptou a equação de Michaelis,

geralmente usada para reações enzimáticas, para calcular as curvas de resposta a fertilizantes. A equação de Michaelis modificada seria

$$Y = A - \frac{A \cdot c}{X + \delta + c} \quad (2.10)$$

onde Y é a produção obtida pela adição de X unidades de fertilizante a um solo que contém um total de nutrientes equivalente a δ unidades de fertilizante. A é a produção máxima possível baixo condições determinadas e c foi chamado "growth-rate factor". Hagin (23) realizou um trabalho no qual demonstra que os pontos experimentais se ajustam tão bem à equação de Mitscherlich como a de Michaelis.

Muitos dos primeiros economistas, tais como Smith, Ricardo e Malthus, sugeriram hipótese acêrca da natureza geral da função de produção na indústria agrícola. Dentre os primeiros trabalhos relacionados com funções de produção na indústria destacam-se os de Wicksell, Cobb-Douglas e associados. Heady e Dillon (25) declaram que, em verdade, a equação que veio a ser conhecida como Cobb-Douglas foi traçada por Wicksell. Êste economista cita a função como

$$Y = X_1^a X_2^b X_3^c \quad (2.11)$$

e, como nos primeiros ensaios de Douglas, diz que a soma de a, b, c deve ser igual a 1,0. Cobb e Douglas aplicaram uma função similar a de Wicksell para dados de indústrias manufaturadoras norte-americanas para o período 1899 - 1922. A função adaptada era

$$Y' = b X_1^k X_2^{1-k} \quad (2.12)$$

onde Y' era o índice de emprêgo nas indústrias e X_2 era o índice de

capital fixo na indústria. Mais tarde, por sugestão de Durand, Douglas e seus colaboradores alteraram a função para

$$Y = b X_1^k X_2^j \quad (2.13)$$

onde k e j poderiam tomar qualquer valor. Uma das principais contribuições de Cobb e Douglas, e também Durand, para o estudo das funções de produção foi o desenvolvimento de uma função de forma algébrica particular. Esta equação tem sido largamente usada devido a sua conveniência na interpretação da elasticidade de produção, porque a estimação de parâmetros envolve maior número de graus de liberdade que em outras formas algébricas o que permite retornos crescentes e decrescentes por escala, e porque seu uso envolve cálculos simples. A função Cobb-Douglas não tem sido usada na agricultura em sua forma original onde a soma das elasticidades individuais deveria ser igual a 1,0 e, às vezes, tem sido usada na distribuição funcional do produto entre fatores.

Em 1955, Heady, Pesek e Brown (26) publicaram uma pesquisa realizada para determinar a dose de adubo economicamente recomendável e a combinação mais adequada de nutrientes para milho, alfafa e trevo vermelho. As funções de produção estudadas incluíram funções logarítmicas, exponenciais, quadráticas de produto cruzado e de raiz quadrada. Eles chegaram a conclusão de que a função de raiz quadrada era a que permitia as melhores previsões de produção. Colwell e Esdaile (14) usaram a função de raiz quadrada para estimar as necessidades de fertilizante na cultura de trigo, sendo que obtiveram um bom ajustamento. Este estudo estava baseado em 49

experimentos de campo. Em trabalhos posteriores sobre calibração de métodos de análise química do solo, Colwell (12, 13) e Colwell e Esdaile (15) também usaram uma função de raiz quadrada para descrever a relação entre o rendimento do cultivo, a dose de nutriente aplicado em forma de adubo e a análise do solo. Segundo Colwell (12), a calibração de um método de análise química do solo é realizada através do estabelecimento de uma função de produção geral, tal que a substituição dos valores da análise de solo proverá estimativas de funções de resposta particulares, apropriadas para os valores da análise do solo.

Brown et al. (10), em 1956, determinaram as funções de produção e as doses economicamente recomendáveis para a cultura do milho, em três tipos diferentes de solos dos Estados Unidos e com dois e três nutrientes variáveis. Os dados foram obtidos de experimentos realizados em blocos ao acaso com arranjo fatorial de tratamentos. A seleção das variáveis que deveriam integrar a função era realizada por meio de análise de variância. As funções usadas eram quadráticas. Doll, Heady e Pesek (17) usaram funções quadráticas e de raiz quadrada para descrever a curva de resposta a fertilizantes em cultivos de trigo e aveia. Estes pesquisadores observaram que os rendimentos, devidos à aplicação de fertilizantes, estimados pela função de raiz quadrada eram inicialmente maiores, mas cresciam menos rapidamente que os rendimentos previstos pela função quadrática. A função de raiz quadrada estimou uma produção máxima teórica a níveis de insumo superiores àquêles em que a função de segundo grau atingia seu máximo. Pesek et al. (33), em trabalho posterior,

também usaram uma função de segundo grau.

Baird e Mason (1) realizaram um estudo sobre o efeito de aplicações de N, P e K sobre a produção de milho, usando os coeficientes de regressão das funções de segundo grau e superfícies de resposta. A função usada foi

$$Y = b_0 + b_1N + b_2P + b_3K + b_{11}N^2 + b_{22}P^2 + b_{33}K^2 + b_{12}NP + b_{13}NK + b_{23}PK \quad (2.14)$$

onde Y é a produção estimada; N, P e K são expressados em forma de código; as letras b são os coeficientes de regressão, os quais eram mantidos na função sempre que tivessem um valor diferente de zero, mesmo quando não eram estatisticamente significativos. Heady, Pesek e McCarthy (27) publicaram um estudo sobre funções de produção e métodos para determinar o uso ótimo de adubo sob condições variáveis na produção de feno, onde declaram haver usado uma função de segundo grau por proporcionar o melhor ajustamento para os dados. Walker e Long (42), em um trabalho para estudar o efeito do pH do solo, fósforo disponível e potássio trocável sobre a produção de soja e medir a significância dos parâmetros selecionados, usaram também uma função do segundo grau.

Em 1967, Pesek, Heady e Venezian (32) publicaram um trabalho sobre funções de resposta a fertilizantes em relação a condições climáticas, localização, solo e cultivo variáveis, no qual numerosas formas algébricas foram testados na análise dos dados. A forma quadrática convencional foi selecionada como a melhor função para todos os anos e cultivos. Estes pesquisadores realizaram uma análise

se de variância combinada para avaliar a contribuição relativa do solo, clima e nutrientes aplicados em forma de fertilizantes na variação da produção em cada lugar e, em geral, constataram que o clima contribui em maior proporção para a variação da produção. Os tratamentos fertilizante e tipo de solo também contribuíram significativamente para a variação da resposta. Interações significativas entre solos e climas, solos e fertilizante, clima e fertilizante também foram constatadas. Os índices climáticos, estimados em função dos dados de precipitação pluviométrica e temperatura para cada cultivo e localidade, explicaram aproximadamente 57% da variância para a produção de milho, 60% para a produção de aveia e 70% para a produção de feno.

Heady e Dillon (25) citam ainda as seguintes formas de funções de produção:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 - b_3 X_1^{1.5} - b_4 X_2^{1.5} + b_5 X_1 X_2 \quad (2.15)$$

$$Y = a X_1^{b_1} e^{c_1 X_1} X_2^{b_2} e^{c_2 X_2} \quad (2.16)$$

A função (2.16) assume que os fatores são limitantes e se X_1 ou X_2 é zero, Y também será igual a zero.

Se bem que vários métodos, destinados a incorporar os valores determinados por análise química do solo nas funções de resposta a fertilizantes, tem sido sugeridos e ensaiados, um dos que tem conseguido- mais adeptos é o de Hildreth. Brown, Jackson e Petersen (9) afirmam que o modelo de Hildreth dá bons resultados quando existe proporcionalidade entre o efeito dos nutrientes do solo e aqueles aplicados em forma de adubo, sobre a produção. Analisando o caso

de um só nutriente, Hildreth considera a produção como uma função de uma variável a qual corresponde à quantidade de nutriente adicionado mais a quantidade do mesmo nutriente existente no solo, devidamente transformada por um fator de proporcionalidade. Em símbolos:

$$Y = f(X) + e \quad (2.17)$$

$$X = N + \lambda W \quad (2.18)$$

onde Y é a produção; X é a quantidade de nutriente disponível no solo, incluindo o nutriente nativo e o adicionado; N é o nutriente adicionado; λ é um fator de proporcionalidade; W é o nutriente existente no solo e determinado por análise química; e e é o erro aleatório. No método de Hildreth a dificuldade consiste em determinar o fator de proporcionalidade. Brown, Jackson e Peterson (9) recomendam a realização de duas análises químicas do solo, uma antes e a outra depois da aplicação do adubo. A segunda análise de solo proveria uma estimativa do total de nutrientes disponíveis para a planta a vários níveis de adubação e assim se poderia determinar λ , a constante de proporcionalidade. Voss e Pesek (41) também publicaram um trabalho em que apresentam uma variante do método de Hildreth para converter as unidades de nutriente determinadas por análise química do solo em unidades de nutrientes aplicadas em forma de adubo.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

O presente estudo será focado de dois pontos de vista mutuamente complementares. Em primeiro lugar se reformulará as leis que regem as funções de produção, analisadas do ponto de vista de modelos e sua justificação matemática. Em segundo lugar se analisará dados reais provenientes de um experimento de adubação para os quais se estimará os parâmetros numericamente e se comprovará o ajuste das funções de produção.

3.1. Justificação matemática das funções de produção com um fator insumo

Nesta seção se reformulará as leis usadas para descrever a relação produção da planta e insumo aplicado ou existente naturalmente no solo. Devido ao interesse histórico se considerarão algumas funções, ainda que de antemão se saiba que não se adaptam a situações reais, pois podem auxiliar a fixar a cronologia dos fatos.

3.1.1. Lei do Mínimo ou Lei de Liebig (1862)

Enunciado: A resposta da planta é diretamente proporcional ao elemento que se encontra mais limitante.

Hipótese: $E(Y) = \beta (X + \delta)$

onde

Y = variável de resposta

β = taxa de incremento de Y por unidade de incremento de X

δ = quantidade de nutriente existente no solo, em forma assimilável às plantas.

X = quantidade de nutriente aplicada em forma de adubo

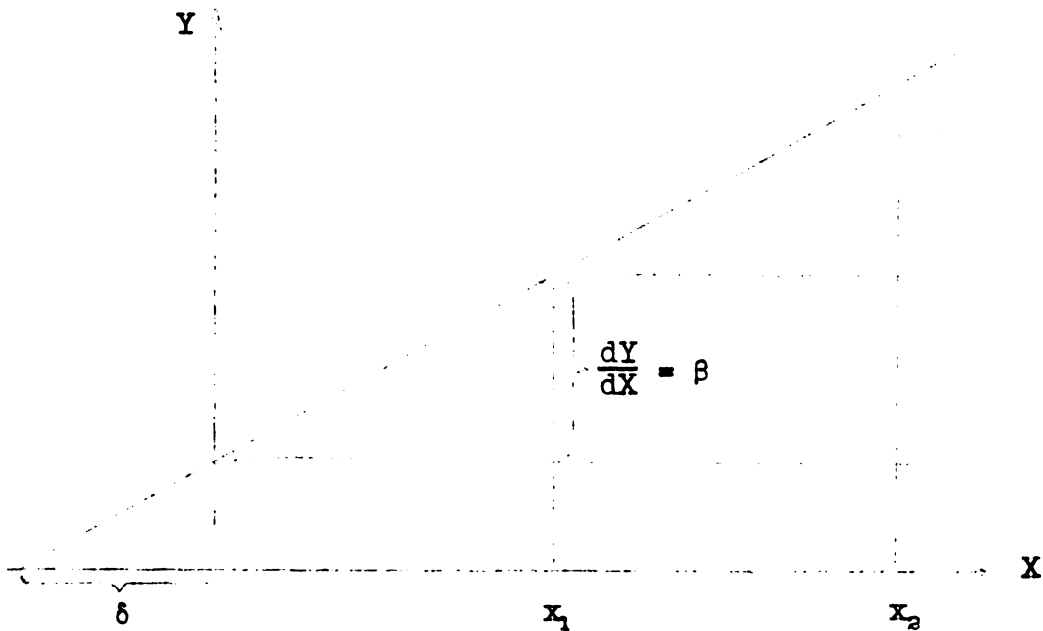


Figura 1 - Representação gráfica da Lei do Mínimo

Justificação: Seja $Y = f(X, \underline{\beta})$ a resposta da planta. Assumindo que $f(X, \underline{\beta})$ é contínua e diferenciável no intervalo (k_1, k_2) implica que $f(X, \underline{\beta})$ se pode expandir segundo a série de Maclaurin

$$f(X, \underline{\beta}) = f(X, \underline{\beta}) \Big|_{X=0} + \frac{df}{dX} \Big|_{X=0} X + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dX^2} \Big|_{X=t} X^2$$

onde $k_1 < t < k_2$

Seja $\underline{\beta}$ = parâmetro da função de resposta

X = matriz do modelo

$$f(X, \underline{\beta}) \Big|_{X=0} = \beta\delta$$

$$\left. \frac{df}{dX} \right|_{X=0} = \beta$$

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X=t} = \epsilon$$

Então podemos escrever

$$Y = \beta\delta + \beta X + \epsilon$$

$$Y = \beta (X + \delta) + \epsilon$$

Supondo que, em média, ϵ tende a zero, isto é, se o modelo suposto é correto teremos $E(\epsilon) = 0$ e em consequência

$$E(Y) = \beta (X + \delta)$$

Em realidade ϵ tem dois componentes: o erro de truncamento do modelo mais o erro experimental.

Considerações: A função de produção derivada dos conceitos de Liebig se reduz a uma regressão linear com um incremento constante (β) na produção (Y) por hectare para cada unidade de adubo aplicada (X). Em geral este tipo de função tem sido desaprovado porque os experimentos mostram que a relação entre a quantidade de elemento fertilizante - ou de qualquer outro fator de produção (água, luz, temperatura, ar) - fornecido à planta e a produção obtida não obedece uma simples linha reta. Assim, aumentando-se progressivamente a dose de um determinado adubo, a produção cresce linearmente, depois os aumentos nas colheitas são cada vez menores, há estabilização da produção e, finalmente, se continuar a crescer a quantidade de adubo, aparecerão sinais de toxidez e a produção cairá. Daí podemos concluir que a Lei de Liebig tem validade dentro de uma determinada

amplitude de operabilidade, isto é, quando se trabalha com pequenas doses de adubo, principalmente em solos de baixa fertilidade.

3.1.2. Lei dos Rendimentos Decrescentes ou Lei de Mitscherlich
(1909)

Enunciado: O incremento da função de resposta Y por unidade de fator limitante X é proporcional ao decremento a partir do máximo teórico.

Hipótese: $E(Y) = A [1 - 10^{-c(X + \delta)}]$

onde

Y = variável de resposta

A = produção máxima teórica

c = coeficiente de eficácia

X = quantidade de nutriente aplicada em forma de adubo

δ = quantidade de nutriente nativo do solo

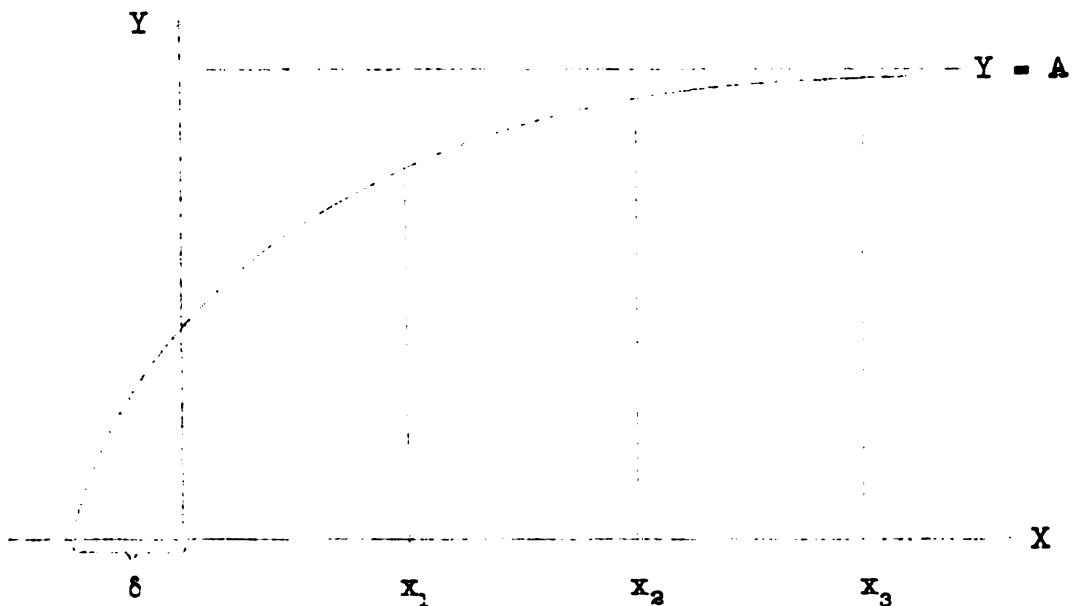


Figura 2 - Representação gráfica da Lei de Mitscherlich

Justificação: Admitindo que Y é a produção da planta, X a quantidade de nutriente assimilável à sua disposição e A uma constante, teríamos que o incremento da produção por unidade de insumo é

$$\frac{dY}{dX} = k (A - Y) \tag{1}$$
$$\frac{dY}{A - Y} = k dX$$

Integrando os dois membros da equação obtemos

$$\int \frac{dY}{(A - Y)} = K + k \int dX \tag{2}$$

em que K é a constante de integração. A integral do primeiro membro se torna mais fácil se se faz a troca de variável da forma Jacobiana $A - Y = t$, portanto $dY = - dt$

$$\int \frac{dY}{(A - Y)} = \int \frac{-dt}{t} = - \int \frac{dt}{t} = - Lt = - L (A - Y)$$

onde o símbolo L indica logaritmo natural ou neperiano.

A equação (2) nos dá imediatamente

$$- L (A - Y) = K + kX \tag{3}$$

Para calcular a constante de integração K suporemos que a quantidade X de nutriente à disposição da planta é nula. Então a produção Y deve ser igual a zero e fica

$$- L A = K$$

Este valor de K substituído na equação (3) nos dá

$$- L (A - Y) = - L A + K X$$

ou ainda

$$L (A - Y) = L A - K X \tag{4}$$

Até aqui supuzemos que X era a quantidade total de nutriente à disposição da planta. Mas essa quantidade é igual a quantidade δ existente previamente no solo mais a dose acrescentada em forma de adubo, que indicaremos de agora em diante por X. Obtemos assim

$$L(A - Y) = L A - k(X + \delta) \quad (5)$$

Para evitar o uso dos logaritmos neperianos faremos uma transformação que permitirá o uso de logaritmos decimais. Se t é o logaritmo decimal de um número N e s o logaritmo neperiano desse mesmo número, temos por definição

$$N = 10^t, \quad N = e^s$$

onde e, que é a base do sistema neperiano, vale aproximadamente 2,7183. Logo temos

$$10^t = e^s$$

Aplicando logaritmo decimal, que indicaremos por log, a essa equação:

$$t \log 10 = s \log e$$

E como $\log 10 = 1$, $t = \log N$, $s = L N$, temos enfim

$$\log N = L N \log e$$

e portanto

$$L N = \frac{\log N}{\log e}$$

Essa fórmula nos dá logo

$$L A = \frac{\log A}{\log e} \quad \therefore \quad L(A - Y) = \frac{\log(A - Y)}{\log e}$$

E da equação (5) vem então

$$\frac{\log (A - Y)}{\log e} = \frac{\log A}{\log e} - k (X + \delta)$$

Multiplicando tudo por $\log e$, temos então

$$\log (A - Y) = \log A - k (\log e) (X + \delta) \quad (6)$$

Como $\log e = 0,4343$ e, por outro lado, o produto da constante positiva k pela constante $\log e$, nos dá outra constante positiva. Então teremos

$$c = k \cdot \log e = 0,4343 k$$

sendo c o coeficiente de eficácia. Então a equação (6) nos dá:

$$\log (A - Y) = \log A - c (X + \delta) \quad (7)$$

Da equação (7) deduzimos logo que

$$\log \left[1 - \frac{Y}{A} \right] = c (X + \delta)$$

Dai tiramos

$$Y = A \left[1 - 10^{-c(X + \delta)} \right]$$

Considerações: A fórmula de Mitscherlich ainda é usada atualmente por muitos pesquisadores para descrever a curva de resposta a fertilizantes. Outros apresentam, porém, como objeção mais importante, o fato seguinte: verifica-se experimentalmente que, a medida que crescem as doses de adubo, cresce a produção até certo ponto, para logo começar a decrescer, chegando a anular-se quando a quantidade de adubo utilizada se torna excessiva e esse fato importantíssimo não é considerado na equação, que não pode representá-lo. Na prática, entretanto, em geral o que se busca é determinar a dose econômica de adubo, logo não há razão para trabalhar com doses tão eleva

das que causem o desequilíbrio fisiológico da planta com o consequente decréscimo da produção. Assim, dependendo do objetivo da pesquisa e mantendo as doses dentro de certos limites, a fórmula de Mitscherlich pode perfeitamente ser usada para descrever a curva de resposta a fertilizantes.

3.1.3. Lei da Resposta Parabólica ou Polinômio de Segunda Ordem

Enunciado: A taxa de incremento da produção da planta por unidade de insumo X declina parabòlicamente em relação ao eixo de simetria.

Hipótese: $E(Y) = \beta_1(X + \delta) + \beta_2(X + \delta)^2$

onde

Y = variável de resposta

X = quantidade de nutriente aplicada em forma de adubo

δ = quantidade de nutriente existente no solo

β_1 = taxa de incremento de Y por unidade de incremento de X

β_2 = taxa de decréscimo da produção por unidade de incremento de X

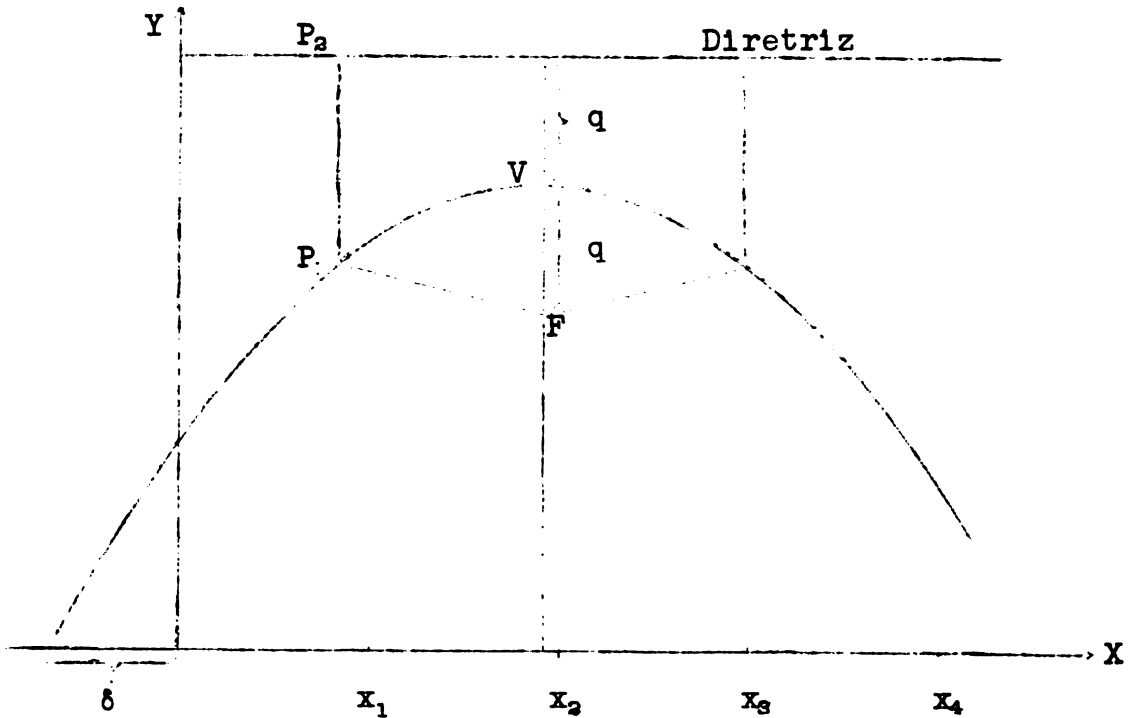


Figura 3 - Representação gráfica da Lei da Resposta Parabólica

Justificação: Seja $Y = f(X, \underline{\beta})$ a resposta da planta. Assumindo que $f(X, \underline{\beta})$ é contínua e diferenciável no intervalo (k_1, k_2) implica que $f(X, \underline{\beta})$ se pode expandir segundo a série de Maclaurin:

$$f(X, \underline{\beta}) = f(X, \underline{\beta}) \Big|_{X=0} + \frac{df}{dX} \Big|_{X=0} X + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dX^2} \Big|_{X=0} X^2 + \frac{1}{3} \frac{d^3f}{dX^3} \Big|_{X=t} X^3$$

onde $k_1 < t < k_2$

Seja

$\underline{\beta}$ = parâmetro da função de resposta

X = matriz do modelo

$$f(X, \underline{\beta}) \Big|_{X=0} = \beta_0^* = \beta_1 \delta + \beta_2 \delta^2$$

$$- \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=0} = \beta_1^* = \beta_1 + 2\beta_2 \delta$$

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dX^2} \right|_{X=0} = \beta_2$$

$$\frac{1}{3} \left. \frac{d^3 f}{dX^3} \right|_{X=t} = \epsilon$$

Então podemos escrever

$$Y = f(X, \underline{\beta}) = \beta_1 \delta + \beta_2 \delta + (\beta_1 + 2\beta_2 \delta) X + \beta_2 X^2 + \epsilon$$

$$Y = \beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2 + \epsilon$$

Supondo que, em média, ϵ tende a zero, isto é, se o modelo suposto é correto teremos $E(\epsilon) = 0$ e em consequência

$$E(Y) = \beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2$$

Na verdade ϵ está composto pelo erro de truncamento do modelo e pelo erro experimental.

Considerações: O uso da função quadrática para descrever a curva de resposta a fertilizantes se torna vantajoso quando se opera com altos níveis de adubo, pois permite representar produções totais de crescentes.

A resposta parabólica se pode considerar como uma parábola normal deslocada ao redor do ponto máximo, cujo centro se encontra em $X_{\text{máx.}}$ e $Y_{\text{máx.}}$ (Figura 3)

$$Y = \beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2$$

Da derivada primeira obtemos $X_{\text{máx.}} = \frac{-\beta_1}{2\beta_2} - \delta$ que introduzido na função nos dá a resposta máxima

$$Y_{\text{máx}} = \beta_1 \left[\frac{-\beta_1}{2\beta_2} - \delta + \delta \right] + \beta_2 \left[\frac{-\beta_1}{2\beta_2} - \delta + \delta \right]^2$$

$$Y_{\text{máx}} = \frac{-\beta_1^2}{2\beta_2} + \frac{\beta_1^2}{4\beta_2}$$

$$Y_{\text{máx}} = \frac{-2\beta_1^2 + \beta_1^2}{4\beta_2} = \frac{-\beta_1^2}{4\beta_2}$$

Somando e diminuindo o valor $-\frac{\beta_1^2}{4\beta_2}$ na função, obtemos

$$Y + \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} = \beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2 + \frac{\beta_1^2}{4\beta_2}$$

$$Y + \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} = \beta_2 \left[X + \left[\delta + \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right] \right]^2$$

$$\frac{1}{\beta_2} \left[Y + \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} \right] = \left[X + \left[\delta + \frac{\beta_1}{2\beta_2} \right] \right]^2$$

que pode ser escrita da forma

$$\frac{1}{\beta_2} (Y - Y_{\text{máx}}) = (X - X_{\text{máx}})^2$$

Dai podemos obter a forma comum da parábola que estamos procurando

$$4q (Y - Y_{\text{máx}}) = (X - X_{\text{máx}})^2$$

onde q é a distância do vértice ao foco F e

$(X_{\text{máx}}, Y_{\text{máx}})$ = vértice do novo sistema

(X, Y) = vértice do sistema original

O eixo de simetria ocorre no ponto $(X - X_{\text{máx}})^2 = 0$

$$\therefore X_{\text{máx}} = - \left[\frac{\beta_1}{2\beta_2} + \delta \right]$$

Do exposto anteriormente se conclui que a função quadrática re apresenta uma figura simétrica em relação ao seu próprio eixo o que não se coaduna muito bem com a realidade. Na prática, a curva de

resposta a fertilizantes apresenta um platô bastante amplo em que a produção se estabiliza para depois, quando doses excessivas de adubo causam o desequilíbrio fisiológico na planta, começar a decrescer em forma assimétrica.

Corolário

1) Lei da Resposta Parabólica na Variável Transformada

Hipótese: $E(Y) = \beta_1 (X + \delta)^{p/2} + \beta_2 (X + \delta)^p$

De acôrdo com a variação do valor de p temos os seguintes casos:

p = 1 função de raiz quadrada

p ≠ 1 função de potência fracionada

p = 2 função parabólica

3.1.4. Lei da Função de Potência (Cobb - Douglas)

Enunciado: O incremento da produção Y é proporcional a taxa de transformação (β_1) ou coeficiente de elasticidade da produção quando o insumo muda de magnitude.

Hipótese: $E(Y) = \beta_0 (X + \delta)^{\beta_1}$

Y = variável de resposta

X = quantidade de nutriente aplicada em forma de adubo

δ = nutriente nativo do solo

β_0 = constante

β_1 = elasticidade da produção

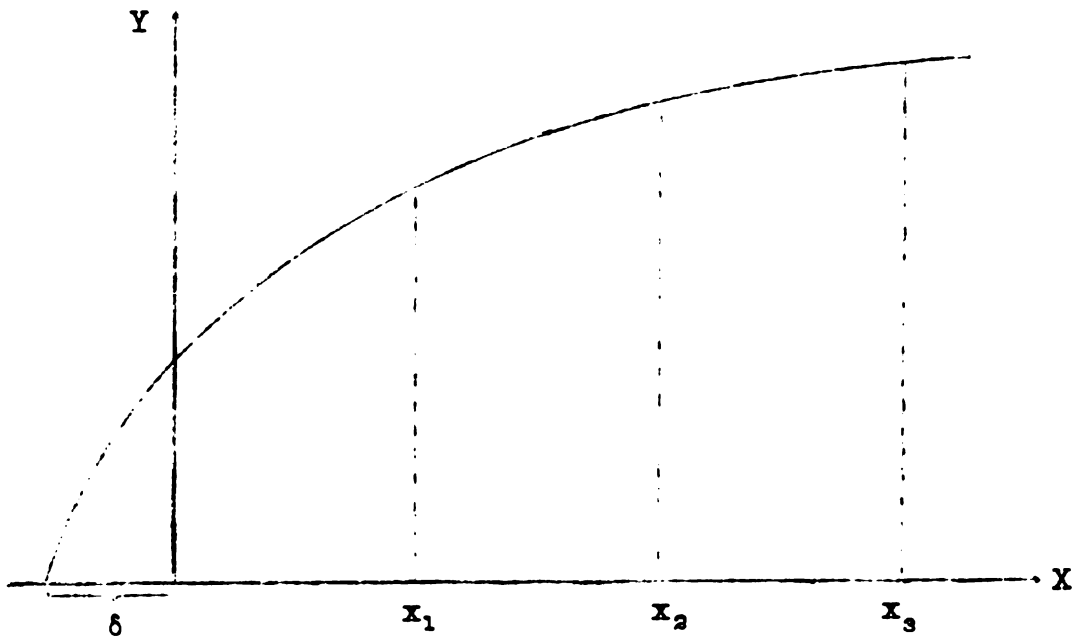


Figura 4 - Representação gráfica da Função de Cobb-Douglas

Justificação: Seja $\frac{dY}{dX'} = \frac{bY}{X'}$ o incremento da produção por unidade de insumo, sendo $X' = X + \delta$. Integrando ambos membros

$$\frac{dY}{dX'} = \frac{bY}{X'}$$

$$\frac{dY}{dX'} = \frac{b dX'}{X'}$$

$$\log Y = b \log X' + K$$

Dai obtemos que

$$Y = b_0 X'^{b_1}$$

Como $X' = X + \delta$ podemos substituir na equação anterior e obtemos

$$Y = b_0 (X + \delta)^{b_1}$$

$$Y = \beta_0 (X + \delta)^{\beta_1}$$

Considerações: A função de Cobb-Douglas não pode ser usada satisfatoriamente para dados que podem ter produtos marginais positivos e negativos, ou seja, no caso em que doses excessivas de adubo provoquem o declínio da produção total. Devido ao "achatamento para fora" da curva, a medida que aumenta a quantidade do insumo, uma produção máxima não é definida. A menos que um ótimo econômico seja determinado para pequenas doses de insumo, a função exponencial especialmente, pode sobrestimar a quantidade de adubo economicamente recomendável. A equação do produto marginal seria

$$\frac{dY}{dX} = \beta_0 \beta_1 (X + \delta)^{\beta_1 - 1} = \frac{\beta_0 \beta_1 (X + \delta)^{\beta_1}}{X + \delta}$$

indicando que, se $\beta_1 = 1$, o produto marginal (e também o produto médio) será constante ao nível β_0 . Quando $\beta_1 > 1$, o produto marginal incrementa com o aumento de X, dependendo da magnitude de β_1 . Quando $\beta_1 < 1$, o produto marginal diminui com o incremento de X, pois que $X^{\beta_1} < X$.

No caso de vários fatores a soma das elasticidades individuais indica a natureza dos retornos por escala. No caso de dois fatores, por exemplo, se a soma das elasticidades $\beta_1 + \beta_1' = 1$, então uma determinada percentagem de incremento em ambos insumos resultará em uma igual percentagem de aumento na produção. Se a soma das elasticidades é maior ou menor que 1, a produção aumentará por uma maior ou menor percentagem, respectivamente, que os insumos. Se a soma das elasticidades é menor que 1, a função de potência produz uma superfície que não possui um pico definido.

3.1.5. Lei da Resposta Exponencial

Enunciado: A função de produção incrementa em forma exponencial até um máximo teórico.

Hipótese: $E(Y) = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2(X + \delta)}$

onde

Y = variável de resposta

X = quantidade de adubo aplicada em forma de adubo

δ = nutriente nativo do solo

β_0 = resposta máxima teórica

β_1 = taxa exponencial de incremento

β_2 = coeficiente de eficácia

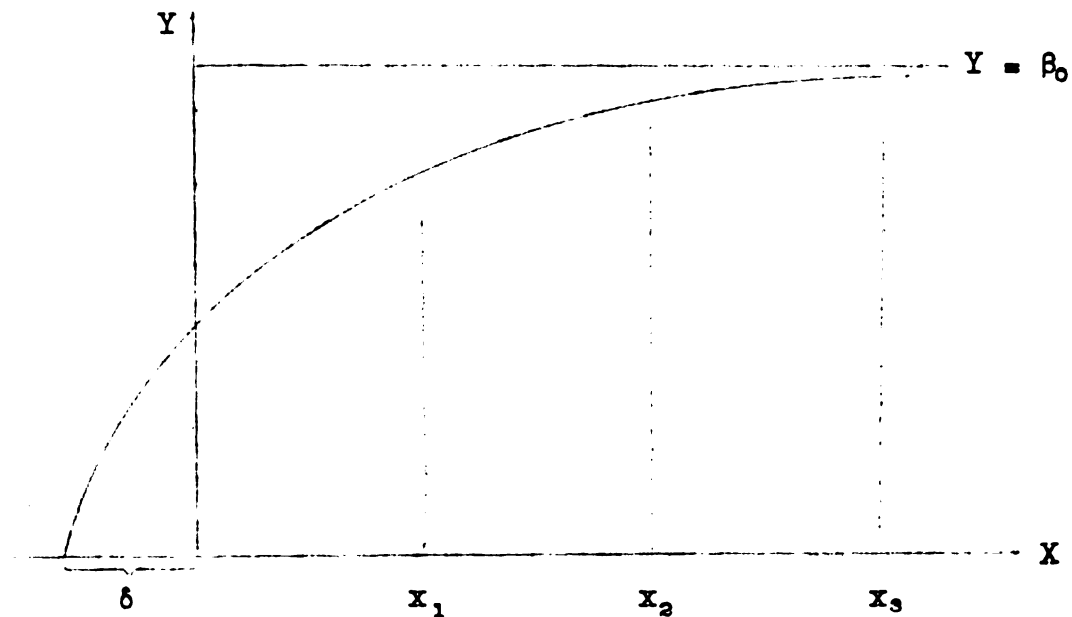


Figura 5 - Representação gráfica da Lei da Resposta Exponencial

Justificação: Considerando que a produção aumenta na forma

$$\frac{dY}{dX'} = (\beta_0 - Y) \beta_2$$

podemos integrar a função

$$\int \frac{dY}{(\beta_0 - Y)} = \int \beta_2 dX'$$

$$- \ln (\beta_0 - Y) = \beta_2 X' + K$$

$$\ln (\beta_0 - Y) = - \beta_2 X' - K$$

$$\beta_0 - Y = e^{-K} e^{-\beta_2 X'}$$

$$\beta_0 - Y = \beta_1 e^{-\beta_2 X'}$$

$$- Y = - \beta_0 + \beta_1 e^{-\beta_2 X'}$$

$$Y = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2 X'}$$

Sabemos que X' engloba tanto o nutriente nativo do solo como aquele aplicado em forma de adubo, logo $X' = X + \delta$. Assim podemos escrever

$$E(Y) = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2 (X + \delta)}$$

Considerações: A função exponencial, demonstrada nesta seção, constitui um caso mais geral da equação de Mitscherlich. Quando $\beta_0 = \beta_1$ a função se torna idêntica a de Mitscherlich. Como a curva de resposta é do mesmo tipo a ela se aplicam as mesmas considerações apresentadas a respeito da equação de Mitscherlich.

3.2. Método de ajustamento das curvas

A título de ilustração consideraremos uma função de resposta muito simples do tipo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \epsilon$$

que corresponde a uma parábola onde Y é a variável dependente e X a variável independente; ϵ é o erro aleatório incontrolável mais o erro devido ao fato de que a variável X não explica Y completamente, visto que outros fatores não foram tomados em conta. Os parâmetros β_0 , β_1 e β_2 são os coeficientes de regressão da população. Do ponto de vista matemático a equação citada pode ser descrita como uma relação de causa, unilateral e contínua. Nestes termos Y é a variável de efeito e X é o fator causante. O interesse está na relação causal como um todo, especialmente nos coeficientes de regressão, e não tanto nos valores de Y que podem ser estimados através da equação.

No presente trabalho o ajustamento das curvas será realizado através da estimação de parâmetros não-lineares pelo método de mínimos quadrados. Entretanto, a título de ilustração apresentaremos também a estimação de parâmetros lineares.

3.2.1. Estimação de parâmetros em modelos lineares pelo método de mínimos quadrados.

Assumindo que o modelo de regressão seja de segunda ordem, linear em relação a seus parâmetros, como segue

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \epsilon \quad (1)$$

Os valores de β_0 , β_1 , β_2 e ϵ da equação (1) são desconhecidos, e na verdade ϵ poderia ser difícil de descobrir visto que varia para cada observação Y . Entretanto, β_0 , β_1 e β_2 permanecem constantes; embora não possamos determiná-los exatamente sem examinar todas as possíveis ocorrências de Y e X , podemos usar a informação provista pelos dados experimentais para dar-nos estimativas b_0 , b_1 , b_2 de β_0 , β_1 e β_2 , então podemos escrever

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 \quad (2)$$

onde \hat{Y} representa o valor estimado de Y para dado valor de X , quando b_0 , b_1 e b_2 estão determinados. A equação (2) pode então ser usada como uma equação preditiva, onde a substituição por um valor de X forneceria a previsão de um valor médio verdadeiro de Y para aquele X .

Supondo que dispomos de n conjuntos de observações (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , ... (X_n, Y_n) ; então pela equação (1) podemos escrever

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \epsilon \quad (3)$$

O princípio do método de mínimos quadrados consiste em estimar os parâmetros β_0 , β_1 e β_2 de tal maneira que a soma dos quadrados dos desvios ($\sum \epsilon_i^2$) seja mínimo. A equação (3) pode ser escrita da forma

$$\epsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_i^2$$

Elevando ao quadrado e somando obtemos

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_i^2)^2 \quad (4)$$

Para minimizar $\sum \epsilon_i^2$ é necessário diferenciar a equação (4) com respeito a β_0 , β_1 e β_2 e a seguir igualar a zero os resultados.

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_i^2) (-1) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_i^2) (-X_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_i^2) (-X_i^2) = 0$$

Dai obtemos

$$\sum \beta_0 + \beta_1 \sum X_i + \beta_2 \sum X_i^2 = \sum Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_i + \beta_1 \sum X_i^2 + \beta_2 \sum X_i^3 = \sum X_i Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_i^2 + \beta_1 \sum X_i^3 + \beta_2 \sum X_i^4 = \sum X_i^2 Y_i$$

escrevendo em forma de matriz temos

$$\begin{pmatrix} n & \sum X_i & \sum X_i^2 \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 \\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \\ \sum X_i^2 Y_i \end{pmatrix}$$

resolvendo-a obteremos os valores de β_0 , β_1 e β_2 que minimizam a soma dos quadrados dos desvios.

Generalizando a descrição do método de estimação por mínimos quadrados para qualquer número de variáveis controláveis se pode

escrever o seguinte modelo

$$\underline{Y} = X \underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$

onde

\underline{Y} = vetor de resposta

X = matriz do desenho ou matriz do modelo

$\underline{\beta}$ = vetor de parâmetros

$\underline{\epsilon}$ = vetor aleatório com $E(\underline{\epsilon}) = 0$ e $\text{Var}(\underline{\epsilon}) = I \sigma^2$

então a superfície da soma de quadrados se pode representar por

$$\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon} = (\underline{Y} - X\underline{\beta})' (\underline{Y} - X\underline{\beta})$$

minimizando dita superfície resulta

$$\frac{\partial \underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}}{\partial \underline{\beta}} = X'X\underline{\beta} - X'\underline{Y} = 0$$

$$X'X\underline{\beta} = X'\underline{Y}$$

onde

$X'X$ = matriz de coeficientes das equações normais

$X'\underline{Y}$ = matriz de somas de produto

As equações normais obtidas aqui são as mesmas que se encontrou anteriormente para o caso particular da equação parabólica cuja solução produz o estimado do vetor de parâmetros.

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

Este estimado de parâmetro tem a propriedade de ser insesgado

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = (X'X)^{-1} X'E(\underline{Y})$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = (X'X)^{-1} (X'X) \underline{\beta}$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = \underline{\beta}$$

Logo o estimado de $\underline{\beta}$ é isento de vício (unbiased, em inglês).

Por outro lado a variância se pode obter na forma usual

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} X' \text{Var}(Y) X(X'X)^{-1}$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} X' I \sigma^2 X(X'X)^{-1}$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} (X'X) (X'X)^{-1} \sigma^2$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} \sigma^2$$

Dai o estimado da variância do vetor $\underline{\hat{\beta}}$ é a matriz de variância-covariância $(X'X)^{-1} s^2$, onde s^2 é o quadrado médio do erro. A matriz de variância-covariância do vetor $\underline{\hat{\beta}}$ é mínima, assim a estimação pelo método de mínimos quadrados é livre de vício e tem variância mínima.

3.2.2. Estimação de parâmetros não-lineares pelo método de mínimos quadrados.

Existem vários métodos de estimação não-lineares, mas em nenhum deles os estimadores mantêm exatamente as propriedades vistas anteriormente para os estimadores obtidos pelo método de mínimos quadrados lineares. Entretanto, os estimados obtidos pelo método de mínimos quadrados não lineares tem a propriedade de ser assintoticamente sem vício e assintoticamente de variância mínima. O único método que será descrito nesta seção e que se usará a seguir é o método de linearização de Gauss, que essencialmente consiste em uma expansão da série de Taylor, que por sucessivas iterações vai melhorando os estimados de parâmetros até haver convergência. O

método se descreve a continuação.

Seja $\underline{Y} = f(X, \underline{\beta})$ a função a ajustar, onde $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \delta \end{pmatrix}$. Logo

$$\underline{Y} = f(X, \underline{\beta}) \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} + \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} (\beta_1 - \beta_1^0) + \frac{\partial f}{\partial \beta_2} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} (\beta_2 - \beta_2^0) + \frac{\partial f}{\partial \delta} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} (\delta - \delta^0) + \epsilon^* \quad (1)$$

$$\text{onde } \underline{\beta}^0 = \begin{pmatrix} \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \delta^0 \end{pmatrix}$$

Seja

$$\underline{Y}^* = \underline{Y} - f(X, \underline{\beta}) \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} = Z_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} = Z_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \delta} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} = Z_3$$

$$\beta_1 - \beta_1^0 = \Delta_1$$

$$\beta_2 - \beta_2^0 = \Delta_2$$

$$\delta - \delta^0 = \Delta_3$$

por conseguinte a equação transformada se pode escrever

$$\underline{Y}^* = \underline{Z}_1 \Delta_1 + \underline{Z}_2 \Delta_2 + \underline{Z}_3 \Delta_3 + \epsilon^*$$

ou $\underline{Y}^* = \underline{Z} \underline{\Delta} + \epsilon^*$ (2)

onde $\underline{Z} = [\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3]$

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix}$$

ϵ^* = erro de truncamento e erro experimental

A equação (2) é essencialmente linear em relação a seus parâmetros, portanto se pode resolver seguindo o método de mínimos quadrados lineares. Portanto

$$\frac{\partial \epsilon^{*T} \epsilon}{\partial \underline{\Delta}} = \underline{Z}' \underline{Z} \underline{\Delta} - \underline{Z}' \underline{Y}^* = \underline{0}$$

$$\underline{\Delta} = (\underline{Z}' \underline{Z})^{-1} \underline{Z}' \underline{Y}^*$$

que corresponde à solução inicial

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_1^0 \\ \beta_2 - \beta_2^0 \\ \delta - \delta^0 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte a primeira aproximação está dada por

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(1)} \\ \delta^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 + \beta_1^0 \\ \Delta_2 + \beta_2^0 \\ \Delta_3 + \delta^0 \end{bmatrix}$$

O próximo passo consiste em substituir os valores iniciais β_1^0, β_2^0

e δ^0 por $\beta_1^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$ e $\delta^{(1)}$ e se efetua tôdas as operações indicadas anteriormente de nôvo. O processo termina quando

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{(i)} \\ \beta_2^{(i)} \\ \delta^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{(i+1)} \\ \beta_2^{(i+1)} \\ \delta^{(i+1)} \end{bmatrix}$$

3.3. Estimação de máximos nas funções de produção

Nesta seção apresentaremos os métodos para a determinação da dose de fertilizante que maximiza a resposta nas diversas funções de produção estudadas no presente trabalho.

3.3.1. Estimação de máximo na função de Mitscherlich

A função de Mitscherlich possui o parâmetro A que corresponde a produção máxima teórica, a qual somente é obtida quando X, a dose de insumo aplicada, tende a infinito. Entretanto, a dose de fertilizante que maximiza a resposta pode ser estimada através da determinação do ponto de máxima curvatura. Assim, diferenciando a fórmula da curvatura,

$$K = \frac{d^2Y/dX^2}{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1)$$

$$\frac{dK}{dX} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{3/2} \left(\frac{d^3Y}{dX^3}\right) - \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right) \frac{3}{2} \left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{1/2} 2 \left[\frac{dY}{dX} \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)\right]}{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{6/2}}$$

$$\frac{dK}{dX} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right] \left(\frac{d^3Y}{dX^3}\right) - 3 \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right) \left(\frac{dY}{dX}\right) \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{5/2}} = 0$$

obtemos

$$\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right] \left(\frac{d^3Y}{dX^3}\right) - 3 \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^2 \left(\frac{dY}{dX}\right) = 0 \quad (2)$$

Da derivação sucessiva da equação de Mitscherlich obtemos

$$\frac{dY}{dX} = Ac e^{-c(X+\delta)} \quad \therefore \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = -Ac^2 e^{-c(X+\delta)}$$

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = Ac^3 e^{-c(X+\delta)}$$

que substituídas na equação (2) nos dão

$$\left[1 + \left(Ac e^{-c(X+\delta)}\right)^2\right] \left[Ac^3 e^{-c(X+\delta)}\right] - 3 \left[-Ac^2 e^{-c(X+\delta)}\right]^2 \left[Ac e^{-c(X+\delta)}\right]$$

$$\left[1 + A^2 c^2 e^{-2c(X+\delta)}\right] \left[Ac^3 e^{-c(X+\delta)}\right] = 3 \left[A^2 c^4 e^{-2c(X+\delta)}\right] \left[Ac e^{-c(X+\delta)}\right]$$

$$\left[1 + A^2 c^2 e^{-2c(X+\delta)}\right] = \frac{3 \left[A^2 c^4 e^{-2c(X+\delta)}\right] \left[Ac e^{-c(X+\delta)}\right]}{\left[Ac^3 e^{-c(X+\delta)}\right]}$$

$$1 + A^2 c^2 e^{-2c(X+\delta)} = 3 A^2 c^2 e^{-2c(X+\delta)}$$

$$2A^2 c^2 e^{-2c(X+\delta)} = 1 \quad \therefore \quad e^{-2c(X+\delta)} = \frac{1}{2A^2 c^2}$$

$$-2c(X + \delta) = \ln (2A^2 c^2)^{-1} \quad \therefore \quad 2c(X + \delta) = \ln 2A^2 c^2$$

$$2c(X + \delta) = \ln (\sqrt{2}Ac)^2 \quad \therefore \quad 2c(X + \delta) = 2 \ln \sqrt{2} \cdot A \cdot c$$

$$c(X + \delta) = \ln \sqrt{2} \cdot A \cdot c \quad \therefore \quad X_{\max} = \frac{1}{c} \ln \sqrt{2} A c - \delta$$

3.3.2. Estimação de máximo na função de Cobb-Douglas

As derivadas sucessivas da função de Cobb-Douglas são

$$\frac{dY}{dX} = \beta_0 \beta_1 (X + \delta)^{\beta_1 - 1} \quad \therefore \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = \beta_0 \beta_1 (\beta_1 - 1) (X + \delta)^{\beta_1 - 2}$$

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = \beta_0 \beta_1 (\beta_1 - 1) (\beta_1 - 2) (X + \delta)^{\beta_1 - 3}$$

que substituídas na fórmula abaixo, cuja origem foi demonstrada na seção 3.3.1,

$$\left[1 + \left(\frac{dY}{dX} \right)^2 \right] \left(\frac{d^3Y}{dX^3} \right) - 3 \left(\frac{d^2Y}{dX^2} \right)^2 \left(\frac{dY}{dX} \right) = 0$$

$$\left[1 + \beta_0^2 \beta_1^2 (X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)} \right] \beta_0 \beta_1 (\beta_1 - 1) (\beta_1 - 2) (X + \delta)^{\beta_1 - 3} =$$

$$= 3 \left[\beta_0^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1)^2 (X + \delta)^{2(\beta_1 - 2)} \right] \left[\beta_0 \beta_1 (X + \delta)^{\beta_1 - 1} \right]$$

$$\left[1 + \beta_0^2 \beta_1^2 (X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)} \right] (\beta_1 - 2) = 3 \left[\beta_0^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1) (X + \delta)^{\beta_1 - 1} \right] (X + \delta)^{\beta_1 - 1}$$

$$\frac{1 + \beta_0^2 \beta_1^2 (X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)}}{(X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)}} = \frac{3 \beta_0^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1)}{(\beta_1 - 2)}$$

$$\frac{1}{(X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)}} + \beta_0^2 \beta_1^2 = \frac{3 \beta_0^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1)}{(\beta_1 - 2)}$$

$$\frac{1}{(X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)}} = \frac{3 \beta_0^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 1) - \beta_0^2 \beta_1^2 (\beta_1 - 2)}{\beta_1 - 2}$$

$$\frac{1}{(X + \delta)^{2(\beta_1 - 1)}} = \frac{\beta_0^2 \beta_1^2 (3\beta_1 - 3 - \beta_1 + 2)}{\beta_1 - 2}$$

$$\frac{1}{(X+\delta)^{2(\beta_1-1)}} \quad \frac{\beta_0 \beta_1 (2\beta_1 - 1)}{\beta_1 - 2}$$

$$(X+\delta)^{2(\beta_1-1)} = \frac{\beta_1 - 2}{\beta_0^2 \beta_1^2 (2\beta_1 - 1)} \quad \therefore X+\delta = \sqrt[2(\beta_1-1)]{\frac{\beta_1 - 2}{\beta_0^2 \beta_1^2 (2\beta_1 - 1)}}$$

$$X_{\text{máx}} = \sqrt[2(\beta_1-1)]{\frac{\beta_1 - 2}{\beta_0^2 \beta_1^2 (2\beta_1 - 1)}} - \delta$$

3.3.3. Estimação de máximo na função exponencial

Derivando sucessivamente a função $Y = \beta_0 - \beta_1 e^{-\beta_2(X+\delta)}$

$$\text{obtemos } \frac{dY}{dX} = \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2(X+\delta)} \quad \therefore \frac{d^2Y}{dX^2} = -\beta_1 \beta_2^2 e^{-\beta_2(X+\delta)}$$

$$\frac{d^3Y}{dX^3} = \beta_1 \beta_2^3 e^{-\beta_2(X+\delta)}$$

Substituindo essas derivadas na fórmula

$$\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right] \left(\frac{d^3Y}{dX^3}\right) - 3\left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^2 \left(\frac{dY}{dX}\right) = 0$$

$$\left[1 + \left(\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2(X+\delta)}\right)^2\right] \left[\beta_1 \beta_2^3 e^{-\beta_2(X+\delta)}\right] -$$

$$3\left[-\beta_1 \beta_2^2 e^{-\beta_2(X+\delta)}\right]^2 \left[\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2(X+\delta)}\right] = 0$$

$$\left[1 + \beta_1^2 \beta_2^2 e^{-2\beta_2(X+\delta)}\right] \left[\beta_1 \beta_2^3 e^{-\beta_2(X+\delta)}\right] =$$

$$3\left[\beta_1^2 \beta_2^4 e^{-2\beta_2(X+\delta)}\right] \left[\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2(X+\delta)}\right]$$

$$\left[1 + \beta_1^2 \beta_2^2 e^{-2\beta_2(X+\delta)}\right] = \frac{3 \left[\beta_1^2 \beta_2^4 e^{-2\beta_2(X+\delta)} \right] \left[\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2(X+\delta)} \right]}{\beta_1 \beta_2^3 e^{-\beta_2(X+\delta)}}$$

$$1 + \beta_1^2 \beta_2^2 e^{-2\beta_2(X+\delta)} = 3 \beta_1^2 \beta_2^2 e^{-2\beta_2(X+\delta)}$$

$$2\beta_1^2 \beta_2^2 e^{-2\beta_2(X+\delta)} = 1 \quad \therefore \quad e^{-2\beta_2(X+\delta)} = \frac{1}{2 \beta_1^2 \beta_2^2}$$

$$-2\beta_2(X+\delta) = \ln (2 \beta_1^2 \beta_2^2)^{-1} \quad \therefore \quad 2\beta_2(X+\delta) = \ln 2\beta_1^2 \beta_2^2$$

$$2\beta_2(X+\delta) = \ln (\sqrt{2}\beta_1 \beta_2)^2 \quad \therefore \quad 2\beta_2(X+\delta) = 2 \ln \sqrt{2}\beta_1 \beta_2$$

$$X + \delta = \frac{1}{\beta_2} \ln \sqrt{2}\beta_1 \beta_2 \quad \therefore \quad X_{\text{máx}} = \frac{1}{\beta_2} \ln \sqrt{2}\beta_1 \beta_2 - \delta$$

3.3.4. Estimação de máximo na função quadrática

Na função de segunda ordem, para estimar a dose de fertilizante que maximiza a resposta, basta igualar a derivada a zero e determinar o valor de X.

$$\frac{dY}{dX} = \beta_1 + 2\beta_2 \delta + 2\beta_2 X = 0$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 (X+\delta) = 0 \quad \therefore \quad 2\beta_2 (X+\delta) = -\beta_1$$

$$X + \delta = \frac{-\beta_1}{2 \beta_2} \quad \therefore \quad X_{\text{máx}} = \frac{-\beta_1}{2 \beta_2} - \delta$$

3.3.5. Estimação de máximo na função de raiz quadrada

No caso da função de raiz quadrada ou polinômio de segunda

ordem na variável transformada, a dose de fertilizante que maximiza a produção pode ser obtida igualando a derivada a zero.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\beta_1}{2\sqrt{X+\delta}} + \beta_2 = 0$$

$$\frac{\beta_1}{2\sqrt{X+\delta}} = -\beta_2 \quad \therefore \quad 2\sqrt{X+\delta} = \frac{\beta_1}{-\beta_2}$$

$$(X + \delta) = \left(\frac{\beta_1}{-2\beta_2}\right)^2 \quad \therefore \quad X_{\text{máx}} = \left(\frac{\beta_1}{-2\beta_2}\right)^2 - \delta$$

3.4. Determinação da dose ótima de fertilizante

Dose ótima de adubo ou dose economicamente recomendável é aquela que proporciona o máximo lucro líquido por unidade de área.

Na determinação da dose ótima de adubo (X_{OR}) é preciso tomar em conta o preço de venda (P) do produto agrícola, o preço de custo do fertilizante (C_1) e os custos fixos (C_0). Logo o lucro líquido (L) corresponderia à fórmula.

$$L = P Y - C_0 - C_1 X \quad (1)$$

A título de ilustração tomaremos como exemplo uma função de produção do tipo

$$Y = \beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2$$

Substituindo Y na equação (1) obtemos

$$L = P \left[\beta_1 (X + \delta) + \beta_2 (X + \delta)^2 \right] - C_0 - C_1 X$$

$$L = P \beta_1 (X + \delta) + P \beta_2 (X + \delta)^2 - C_0 - C_1 X \quad (2)$$

Para maximizar o lucro basta derivar a equação (2)

$$\frac{dL}{dX} = P [\beta_1 + 2 \beta_2 (X + \delta)] - C_1 = 0$$

$$\beta_1 + 2 \beta_2 (X + \delta) = \frac{C_1}{P}$$

$$2 \beta_2 (X + \delta) = \left[\frac{C_1}{P} - \beta_1 \right]$$

$$X + \delta = \frac{1}{2 \beta_2} \left| \frac{C_1}{P} - \beta_1 \right|$$

$$X_{OR} = \frac{-\beta_1}{2 \beta_2} - \delta + \frac{C_1}{2P\beta_2} \quad (3)$$

Entretanto, sabemos que $\frac{-\beta_1}{2\beta_2} - \delta$ corresponde a dose de adubo que maximiza a produção, logo podemos escrever

$$X_{OR} = X_{m\acute{a}x} - \frac{C_1}{2|\beta_2|P}$$

Dai se conclui que a dose ótima de fertilizante é uma função da dose máxima teórica ($X_{m\acute{a}x}$).

3.5. Descrição dos dados experimentais e análises químicas realizadas no laboratório

Os dados reais, que servirão para estimar numéricamente o parâmetro "fertilidade inicial do solo" por meio do ajustamento de vários modelos, foram obtidos de um experimento de campo sobre adubação fosfatada de cana de açúcar, realizado em solo da série Instituto, em Turrialba, Costa Rica (18). O experimento foi instalado no dia 2 de setembro de 1968, utilizando-se a variedade Barbados

50135. O delineamento experimental usado foi o de parcelas divididas, usando-se doses de 0, 125, 250 e 375 kg/ha de P_2O_5 , proveniente de duas fontes: superfosfato triplo (46% de P_2O_5) e fosfato de Renania (30% de P_2O_5). O adubo fosfatado foi aplicado no momento do plantio, em sulcos de aproximadamente vinte centímetros de profundidade. Em tôdas as sub-parcelas foi realizada uma adubaçãõ complementar, também em sulcos, composta de 62 kg/ha de N, 40 kg/ha de P_2O_5 e 80 kg/ha de K_2O . Assim, em realidade, as doses de P_2O_5 usadas foram de 40, 165, 290 e 415 kg/ha. O tamanho das sub-parcelas foi de 10,40 m por 10,00 m, sendo que a área total do experimento foi de 4.324 metros quadrados. Cada sub-parcela possuía 8 fileiras de cana com espaçamento de 1,30 m entre si.

Após o corte, realizado em 17 de setembro de 1969, a cana de açúcar produzida em cada sub-parcela foi pesada separadamente e a seguir se procedeu a determinaçãõ do conteúdo de sacarose e o seu grau de pureza, dados necessários para o cálculo da produçãõ de açúcar de cada sub-parcela. Os resultados dêste experimento aparecem no apêndice, quadro 1.

Considerando que a análise de variância revelou a inexistência de diferença estatisticamente significativa entre as fontes de fósforo (18), para efeito do presente trabalho não se tomará em conta as fontes de P_2O_5 .

Para as análises químicas de laboratório foram tomadas cinco amostras de solo de cada sub-parcela, as quais formaram uma amostra composta. Para a determinaçãõ da quantidade de fósforo disponível

no solo, antes do plantio, se considerou conveniente usar os métodos de Egner-Riehm (4), Bray 1 (4, 8, 30), Olsen (30) e Mehlich, mais conhecido como Carolina do Norte (4, 30). Os resultados destas determinações constam do apêndice, quadro 2. Foram realizadas também algumas determinações para a caracterização do solo onde se instalou o experimento.

3.6. Descrição do solo da área experimental

O experimento de campo foi realizado no solo da série Instituto, localizado em terrenos do IICA-CEI. Trata-se de um solo de natureza aluvial, formado sobre depósitos de cascalho e areia grossa, na sua maior parte bastante meteorizados. O terreno é levemente ondulado. A precipitação pluviométrica média é de 2600 mm anuais, a umidade relativa do ar média é 88% e a temperatura média anual é de 22,3°C.

O estudo do perfil, realizado por Hardy (24), indica a presença de um horizonte rico em matéria orgânica, com cerca de 20 cm de profundidade, de cor marron-escura, quando úmido, e marron-cinza, quando seco; a textura é argilosa e possui uma mínima quantidade de areia; possui consistência plástica, sendo pegajoso quando úmido e duro, quando seco. A permeabilidade do solo é bastante alta. O subsolo é mais amarelado com presença de moteados avermelhados e manchas negras a medida que aumenta a profundidade, denotando permeabilidade decrescente, devido a textura argilosa e a compactação. Os sedimentos de cascalho e areia sobre os quais repousa este solo

surgem a profundidades variáveis. A abundância de pedras redondas e a capa freática variam com a profundidade; na época das chuvas o nível freático pode atingir 80 cm de profundidade, em alguns lugares.

O solo, na área do experimento, possui uma densidade aparente de 1,08. Ademais possui as seguintes características químicas: pH em água de 5,05; pH em CaCl_2 de 4,45; 5,30% de matéria orgânica; 0,32% de nitrogênio total; capacidade de intercâmbio catiônico de 19,80 me/100 g de solo; cálcio 2,45 me, magnésio 1,35 me e potássio 0,61 me por 100 gramas de solo.



4. RESULTADOS

Neste capítulo se apresentam e se interpretam os resultados obtidos no presente estudo. Cabe destacar que, devido ao fato de que as equações de Mitscherlich e exponencial não permitirem representar produções totais crescentes e decrescentes, não se procedeu o ajustamento das citadas funções. Esta afirmativa é ratificada pelos resultados apresentados na seção 4.1 que indicam um ajustamento muito pobre no caso da função de Cobb-Douglas que também não permite representar produções totais crescentes e decrescentes ao mesmo tempo.

Em primeiro lugar se apresenta o ajustamento das curvas de resposta em função do fertilizante aplicado, sem tomar em consideração a fertilidade inicial do solo. Em seguida se apresenta o ajustamento das curvas de resposta considerando a fertilidade inicial do solo, em termos de kg/ha de P_2O_5 , determinada por quatro métodos de análise química. Depois se apresentam os valores da fertilidade inicial do solo, estimados por medio da resposta observada, cujo conhecimento é de fundamental importância para a seleção do método de análise química mais eficiente, bem como para a posterior calibração do mesmo.

Como complemento se apresentam outras estimações de parâmetros que estão relacionados com a curva de resposta, tais como a dose máxima de fertilizante a aplicar e a máxima resposta, estimada no ponto onde $X_{máx.}$

4.1. Estimação da curva de resposta em função do adubo aplicado

Nesta seção se apresenta o ajustamento da curva de resposta para os modelos: quadrático, raiz quadrada e Cobb-Douglas, já descritos no capítulo anterior. O grau de ajustamento das curvas de resposta, omitindo o parâmetro "fertilidade inicial do solo", em relação às produções observadas no experimento de campo, pode ser avaliado pelos valores de R^2 .

Quadro 1. Ajustamento da função quadrática aos dados experimentais $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$

Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R^2
S 1	13.551,7733	42,6556	- 0,09988	0,999195
S 2	11.388,3448	41,8938	- 0,09943	0,834080
S 3	11.811,7607	40,3865	- 0,07990	0,574307
Média	12.250,6262	41,6453	- 0,09307	0,802527
R 1	5.665,5895	82,0537	- 0,15572	0,998955
R 2	11.009,8350	43,3338	- 0,08036	0,655892
R 3	11.649,5310	22,3504	- 0,04268	0,319916
Média	9.441,6518	49,2460	- 0,09292	0,658254

Quadro 2. Ajustamento da função de raiz quadrada aos dados experimentais $Y = \beta_0 + \beta_1 X^{1/2} + \beta_2 X$

Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R ²
S 1	5.964,8722	1.891,6868	- 72,8797	0,970472
S 2	2.844,2378	2.057,3532	- 79,6257	0,952134
S 3	4.078,7569	1.805,4613	- 62,9367	0,754004
Média	4.295,9556	1.918,1671	- 71,8140	0,892203
R 1	- 5.915,3017	2.905,2881	- 96,3928	0,958259
R 2	6.613,0852	1.222,7677	- 38,5101	0,500350
R 3	10.073,1264	517,4451	- 16,2968	0,177817
Média	3.590,3033	1.548,5003	- 50,3999	0,545475

A observação dos R² nos quadros 1 e 2 indica que, de um modo geral, tanto a função quadrática como a de raiz quadrada proporcionam um ótimo ajustamento. Por outro lado a observação do quadro 3 indica que o ajustamento da função de Cobb-Douglas é bem inferior àquêle proporcionado pelas funções quadrática e de raiz quadrada e no caso de algumas repetições (S1, S2, S4 e R3) proporciona um ajustamento muito pobre. Êste fato é perfeitamente plausível, visto que a função de Cobb-Douglas, bem como a de Mitscherlich e a exponencial, são tipicamente crescentes, logo não se poderia esperar que as mesmas proporcionassem um bom ajustamento quando há produções

Quadro 3. Ajustamento da função de Cobb-Douglas aos dados experimentais $Y = \beta_0 X^{\beta_1}$

Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	R^2
S 1	15.614,154	0,006441	0,001805
S 2	13.450,680	0,005370	0,001221
S 3	10.673,366	0,069985	0,358986
S 4	12.449,779	0,022091	0,097188
Média	13.046,995	0,025972	0,114800
R 1	5.217,949	0,175481	0,645553
R 2	9.594,578	0,088518	0,412654
R 3	11.111,199	0,040518	0,125192
Média	8.641,242	0,101505	0,394466

totais decrescentes, pois elas não permitem descrever esta situação. Pode-se notar também que o ajustamento da função de Cobb-Douglas é tanto mais baixo quanto maiores são os produtos marginais negativos.

Na curva descrita pela função de Cobb-Douglas, o grau de curvatura é dado pelo expoente $\hat{\beta}_1$, assim quanto menor é β_1 mais acentuada será a curvatura, isto é, haverá uma brusca alteração na direção da curva. A medida que $\hat{\beta}_1$ aumenta a curva tende a distender-se e quando $\hat{\beta}_1 = 1$ a curva se transforma numa reta. Outro problema

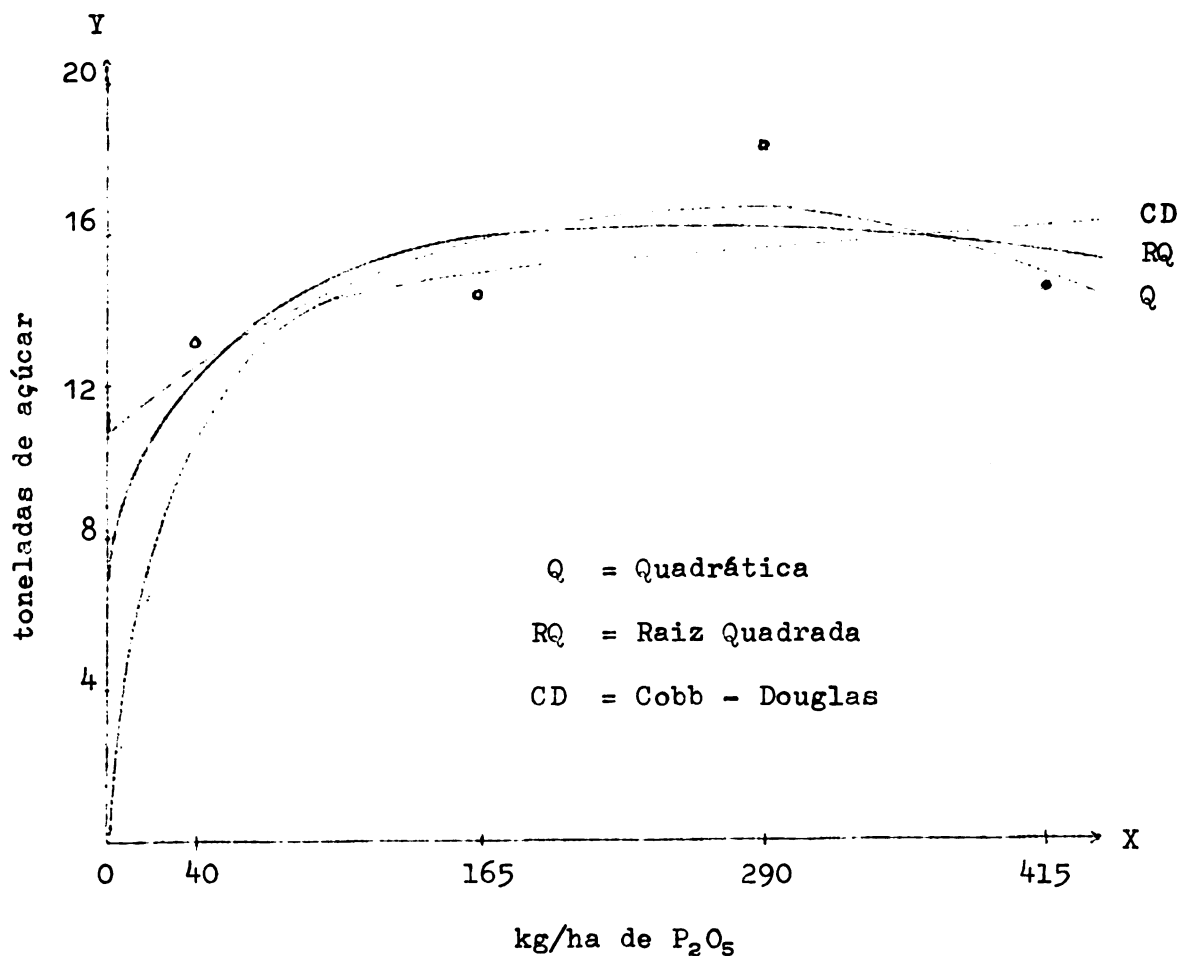


Figura 6. Representação gráfica das curvas de resposta em função do fertilizante aplicado, no caso da repetição R 2.

que surge com a função de Cobb-Douglas, bem como com a de Mitscherlich, no caso de não se considerar a fertilidade inicial do solo, é que em ausência de aplicação de adubo ($X = 0$) a produção é nula o que não se coaduna com a realidade. Pode-se observar também que as produções estimadas pela função de Cobb-Douglas estão sujeitas a uma elasticidade constante, logo uma produção máxima teórica não pode ser definida.

Nota-se que, a princípio, o incremento da produção por unidade de insumo é bem maior na função de raiz quebrada que na quadrática. Entretanto, quando as quantidades de adubo aplicado são maiores, inverte-se a situação. Enquanto a figura representada pelo polinômio de segundo grau corresponde a uma parábola simétrica, a curva descrita pela função de raiz quebrada tende a formar um extenso platô onde a produção estimada permanece praticamente estabilizada (figura 7). A observação das constantes $\hat{\beta}_0$ indica que, em ausência de aplicação de adubo, a produção estimada pela função de raiz quadrada é sempre inferior àquela estimada pela função quadrática. A presença do $\hat{\beta}_0$ negativo na repetição R1 implicaria na existência de produção total negativa em ausência de aplicação de adubo o que constitui um absurdo, inadmissível na prática. A ocorrência dessa anomalia poderia ser atribuída a baixa produção observada ao se aplicar a dose de 40 kg/ha de P_2O_5 o que provocou uma brusca inclinação da curva, de tal modo que o eixo dos Y foi cortado pela curva na parte negativa.

4.2. Influência da introdução da fertilidade inicial do solo (determinada por análise química) sobre a curva de resposta

O conteúdo inicial de P_2O_5 no solo foi determinado pelos quatro métodos de análise química, citados no capítulo anterior. Os resultados das análises químicas constam do apêndice. Nesta seção se apresentam as modificações causadas nos parâmetros e no ajustamento das funções quadráticas e de raiz quadrada, pela introdução

do parâmetro "fertilidade inicial do solo", determinado por análises químicas, nas equações de resposta. Nesta seção não se apresentam resultados dos modelos assintóticos e crescentes, visto que os mesmos não proporcionaram um grau de ajustamento satisfatório.

Quadro 4. Influência da fertilidade inicial do solo, determinada por análise química, sobre o ajustamento da função quadrática.

Método de análise química	Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R ²
Egner-Riehm	S 1	11.931,889	50,0285	- 0,10079	0,99910
" "	S 2	10.026,341	48,4332	- 0,09988	0,83558
" "	S 3	10.828,102	43,6321	- 0,07718	0,56596
" "	R 1	2.938,387	90,9566	- 0,15300	0,99858
" "	R 2	9.276,453	50,2006	- 0,08308	0,66354
" "	R 3	11.109,776	23,3329	- 0,04041	0,28082
" "	Média	9.351,825	51,0973	- 0,09239	0,72393
Bray 1	S 1	12.493,851	47,2923	- 0,09943	0,99785
"	S 2	10.530,544	45,5557	- 0,09897	0,82497
"	S 3	11.342,034	40,2725	- 0,07355	0,58059
"	R 1	4.314,220	87,7282	- 0,15345	0,99868
"	R 2	10.079,417	47,4739	- 0,08217	0,65211
"	R 3	11.220,559	23,8831	- 0,04268	0,31190
"	Média	9.996,771	48,7009	- 0,09171	0,72768

Cont. Quadro 4.

Método de análise química	Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R ²
Mehlich	S 1	12.758,026	46,0551	- 0,09897	0,99783
"	S 2	10.661,597	45,3369	- 0,09988	0,82941
"	S 3	10.993,348	43,6040	- 0,08036	0,57863
"	R 1	4.019,505	88,6558	- 0,15754	0,99915
"	R 2	10.222,718	46,3162	- 0,08081	0,94525
"	R 3	11.204,679	23,9403	- 0,04313	0,30916
"	Média	9.976,645	48,9847	- 0,09345	0,77657
Olsen	S 1	12.816,545	45,9861	- 0,09988	0,99782
"	S 2	10.824,938	44,0784	- 0,09806	0,83715
"	S 3	11.280,674	42,4572	- 0,08036	0,57799
"	R 1	4.742,118	84,5856	- 0,15254	0,99868
"	R 2	10.341,114	46,2590	- 0,08217	0,65590
"	R 3	11.345,604	23,1703	- 0,04177	0,31603
"	Média	10.220,165	47,7561	- 0,09246	0,73059

A introdução do parâmetro "conteúdo inicial de P₂O₅ no solo", determinado por análise química, praticamente não afeta o ajustamento da função quadrática, visto que a variação dos R² é mínima em relação aos observados na seção 4.1; entretanto causa algumas alterações nos parâmetros que descrevem a curva de resposta. Assim pode-

se observar que a constante $\hat{\beta}_0$ diminui com o aumento da quantidade de P_2O_5 determinada pela análise química do solo. O fato de somar-se o valor da análise química do solo à dose de P_2O_5 aplicada em forma de abudo provoca um deslocamento da curva para a direita e a interseção da curva com o eixo dos Y se verifica em um ponto mais próximo da origem. O deslocamento da curva é proporcional ao valor da análise química somado à dose de X, e em consequência também será proporcional a diminuição do valor de $\hat{\beta}_0$. O $\hat{\beta}_0$, considerado nesta seção, corresponderia ao valor da produção em absoluta ausência de P_2O_5 o que não se condiz com a realidade, visto que o fósforo é um elemento essencial à nutrição da planta, a produção, em ausência desse nutriente, deveria ser nula. A forma da curva também sofre ligeira transformação o que pode ser comprovado pelas alterações que tem o coeficiente de regressão $\hat{\beta}_1$. Assim pode-se notar que o incremento da produção por unidade de insumo ($\hat{\beta}_1$) aumenta a medida que cresce o valor da análise química do solo, introduzido na equação. O coeficiente $\hat{\beta}_2$, por seu turno, sofre alterações tão pequenas e incertas que pode-se afirmar que permanece estável. Do anteriormente exposto se deduz que, quando se soma o valor da análise química do solo à dose de P_2O_5 aplicada, a curva descrita pela função quadrática se torna mais acentuada, isto é, aumenta a sua concavidade em relação ao eixo dos X. O fato de $\hat{\beta}_0$ registrar sempre altas produções, em completa ausência de fósforo, indica que os valores determinados pela análise química do solo são muito inferiores àqueles que seriam estimados pelo modelo matemático, pois caso fossem semelhantes $\hat{\beta}_0$ tenderia a zero.

Quadro 5. Influência da fertilidade inicial do solo, determinada por análise química, sobre o ajustamento da função de raiz quadrada.

Método de análise química	Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R ²	
Egner-Riehm	S 1	- 1.227,588	2.651,0113	- 90,8745	0,978563	
"	"	S 2	- 3.944,736	2.781,5608	- 96,7870	0,937309
"	"	S 3	- 584,077	2.255,4239	- 72,4434	0,720952
"	"	R 1	-16.142,102	3.940,3845	-120,6473	0,967865
"	"	R 2	737,483	1.858,0463	- 54,9739	0,533006
"	"	R 3	8.172,560	742,4176	- 22,4567	0,177404
"	"	Média	- 2.164,743	2.371,4740	- 76,3638	0,719183
Bray	1	S 1	1.227,588	2.404,0589	- 85,0614	0,981168
"	"	S 2	- 1.310,071	2.502,0226	- 90,1458	0,935601
"	"	S 3	2.390,241	1.922,9697	- 63,5922	0,733502
"	"	R 1	-12.510,688	3.581,7998	-112,4385	0,965172
"	"	R 2	3.072,315	1.616,4543	- 49,0792	0,517300
"	"	R 3	8.838,652	651,1999	- 19,7635	0,185616
"	"	Média	284,672	2.113,0842	- 70,0134	0,719726
Mehlich	"	S 1	2.376,078	2.280,3385	- 82,0768	0,980084
"	"	S 2	- 694,064	2.445,2794	- 89,0417	0,943034
"	"	S 3	585,585	2.164,4927	- 71,3411	0,738024
"	"	R 1	-12.147,958	3.568,9194	-112,9425	0,965351
"	"	R 2	3.974,042	1.511,3842	- 46,0751	0,513665

Cont. Quadro 5.

Método de análise química	Repetição	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R^2
Mehlich	R 3	8.756,651	661,9615	- 20,1149	0,185010
"	Média	475,056	2.105,3959	- 70,2653	0,720861
Olsen	S 1	2.632,255	2.257,4487	- 81,7550	0,979748
"	S 2	247,607	2.332,4668	- 85,8400	0,944727
"	S 3	1.802,014	2.040,6678	- 68,4487	0,743608
"	R 1	-9.383,586	3.255,0302	-104,3342	0,961167
"	R 2	4.337,879	1.481,0701	- 45,5880	0,513281
"	R 3	9.105,772	626,2126	- 19,2137	0,185080
"	Média	1.456,990	1.998,8160	- 67,5299	0,721268

No caso da função de raiz quadrada se pode observar com mais clareza as mesmas variações dos parâmetros $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ descritas para o caso do polinômio de segunda ordem. Ademais se nota que o coeficiente $|\hat{\beta}_2|$ acompanha as variações de $\hat{\beta}_1$, isto é, a aumentos do valor da análise química somado ao adubo aplicado correspondem aumentos proporcionais nos coeficientes $\hat{\beta}_1$ e $|\hat{\beta}_2|$. Daí se deduz que a curva descrita pela função de raiz quadrada aumenta a sua concavidade em relação ao eixo dos X o que explica as grandes reduções que sofre o parâmetro $\hat{\beta}_0$ o qual chega a ser negativo em vários casos. Na prática não há produções negativas, daí se deduz que nos casos

em que $\hat{\beta}_0$ é negativo o valor da análise química do solo é superior àquêlé que seria obtido pela determinação direta por meio do ajustamento da curva. Se os valores da análise química do solo fôsem idênticos àquêles determinados pelo modelo matemático, então a esperança matemática de $\hat{\beta}_0$ seria igual a zero.

4.3. Estimação da fertilidade inicial do solo por meio da função de resposta

Nesta seção se apresentam os valores de P_2O_5 , existente no solo em forma assimilável às plantas, estimado de forma direta através do ajustamento das funções quadrática e de raiz quadrada, visto que as demais funções estudadas não proporcionam um ajustamento satisfatório aos resultados de produção observados no experimento de campo, conforme ficou demonstrado na seção 4.1. deste capítulo.

Quadro 6. Conteúdo inicial de P_2O_5 no solo em kg/ha ($\hat{\delta}$), estimado pela função quadrática $Y = \beta_1(X + \delta) + \beta_2(X + \delta)^2$

Repetição	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\delta}$	Desvio padrão
S 1	85,03943	- 0,09984	212,253	0,2015
S 2	79,29532	- 0,09950	187,944	3,1927
S 3	73,56714	- 0,08003	207,309	5,1893
*T S	62,54312	- 0,06114	281,484	3,8083
R 1	101,28132	- 0,15555	61,806	0,4136
R 2	73,57568	- 0,08028	188,348	5,0231
R 3	49,93572	- 0,04279	322,318	5,0126
*T R	101,27870	- 0,15217	62,548	6,5858

* Valores obtidos pela combinação de tódas as informações.

Os valores de " δ " estimados através do ajustamento da função quadrática variam entre 61,80 e 322,30 kg/ha de P_2O_5 , indicando que existe uma acentuada variação da fertilidade inicial do solo entre as parcelas. Aparentemente a função quadrática sobrestima os valores de " δ ", visto que a maior quantidade de P_2O_5 determinada por análise química do solo foi de 42,00 kg/ha que é cêrca de oito vêzes menor que o maior valor estimado pela equação.

Quadro 7. Conteúdo inicial de P_2O_5 no solo em kg/ha ($\hat{\delta}$), estimado através do ajustamento da função de raiz quadrada

$$Y = \beta_1(X + \delta)^{1/2} + \beta_2(X + \delta)$$

Repetição	β_1	β_2	$\hat{\delta}$	Desvio padrão
S 1	2.528,2446	- 87,8354	30,546	1,0102
S 2	2.380,6577	- 87,8183	12,525	1,8238
S 3	2.254,1235	- 74,3566	18,887	4,0857
*T S	2.027,5240	- 63,9267	54,228	3,7290
R 1	1.909,3442	- 60,2029	2,500	3,2967
R 2	1.861,1635	- 52,9414	49,342	5,8609
R 3	1.446,3056	- 36,6406	132,159	5,3386
*T R	1.897,5105	- 58,1614	23,748	4,2234

* Valores obtidos pela combinação de tôdas as informações.

A função de raiz quadrada estimou valores de " δ " que variam entre 2,50 e 132,20 kg/ha de P_2O_5 , correspondendo, portanto, a maiores oscilações que na função quadrática. Os valores de " δ " obtidos por determinação direta através do ajustamento da função de raiz quadrada são bem mais próximos aos valores determinados por análise química do solo, que variam entre 10,00 e 42,00 kg/ha de P_2O_5 .

Comparando os valores de " $\hat{\delta}$ ", estimados pelas duas funções, pode-se notar que a quadrática sempre estimou valores de " $\hat{\delta}$ " de 2 a 24 vezes superiores àquêles estimados pela função de raiz quadra-

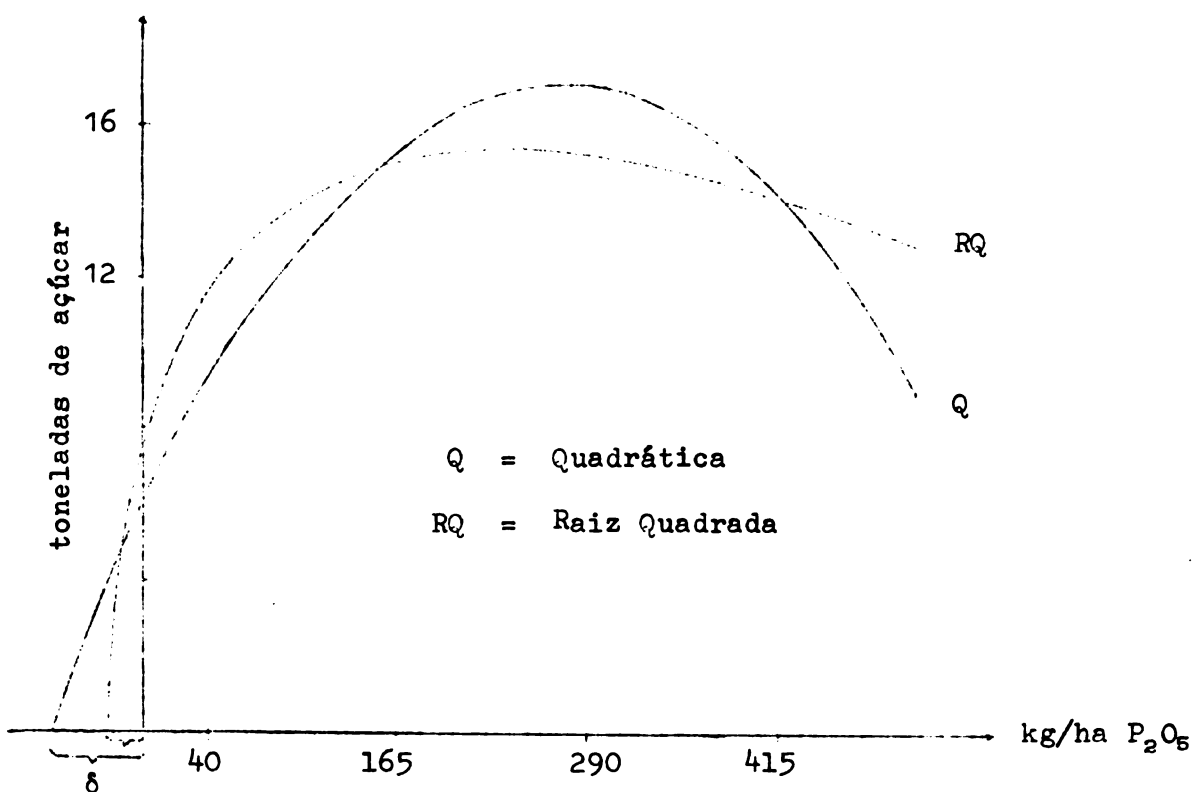


Figura 7. Representação gráfica da estimação da fertilidade inicial do solo por meio do ajustamento da curva de resposta para o total das repetições R.

Quadro 8. Variâncias e Covariâncias assintóticas dos estimados de alguns parâmetros.

F U N Ç Ã O Q U A D R Á T I C A					
Repe- tição	Var(β_1)	Var(β_2)	Var(δ)	Cov(β_1, δ)	Cov(β_2, δ)
S 1	$0,09 \times 10^{-4}$	$0,41 \times 10^{-10}$	38,94	- 0,02	39×10^{-7}
S 2	21×10^{-4}	104×10^{-10}	8.847,29	- 4,04	9×10^{-3}
S 3	69×10^{-4}	275×10^{-10}	32.990,81	- 14,43	29×10^{-3}
*T S	11×10^{-4}	37×10^{-10}	11.906,81	- 3,54	6×10^{-3}
R 1	$0,26 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-10}$	19,04	- 0,02	5×10^{-5}
R 2	64×10^{-4}	258×10^{-10}	254,82	- 12,13	24×10^{-3}
R 3	97×10^{-4}	257×10^{-10}	178.606,41	- 40,67	66×10^{-3}
*T R	19×10^{-4}	131×10^{-10}	1.047,07	- 1,18	3×10^{-3}

F U N Ç Ã O D E R A I Z Q U A D R A D A					
S 1	0,081	26×10^{-5}	155,34	- 2,98	0,17
S 2	0,222	75×10^{-5}	285,97	- 6,32	0,37
S 3	1,320	41×10^{-5}	1.941,42	- 42,08	2,36
*T S	0,367	110×10^{-5}	1.664,83	- 21,81	1,20
R 1	0,698	228×10^{-5}	544,60	- 15,04	0,87
R 2	4,048	1.116×10^{-5}	1.554,43	-224,45	11,72
R 3	6,750	1.556×10^{-5}	14.045,51	-921,73	44,13
*T R	0,527	157×10^{-5}	1.127,92	- 20,79	1,13

* Valores obtidos combinando tódas as informações.

O quadro 8 indica que os coeficientes $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$, tanto na função quadrática como na de raiz quadrada, são relativamente mais estáveis, pois sua variância é muito baixa. Entretanto, o parâmetro $\hat{\delta}$ é muito instável, visto que sua variância oscila grandemente, contudo na função de raiz quadrada a variância de $\hat{\delta}$ oscila menos que na quadrática.

A covariância negativa entre $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\delta}$ indica que, a medida que aumenta o valor de $\hat{\delta}$, diminui o valor de $\hat{\beta}_1$ o que era de esperar-se, visto que quanto menor é o conteúdo de um nutriente no solo tanto maior deverá ser o incremento da produção por unidade de adubo aplicada.

A covariância positiva entre $\hat{\beta}_2$ e $\hat{\delta}$, embora reduzida, revela que a medida que aumenta o valor de $\hat{\delta}$, também aumenta $|\hat{\beta}_2|$. Isto é muito compreensível, visto que num solo rico em fósforo é de esperar-se que o aumento da produção seja pequena ao aplicar pequenas doses de adubo e que a curva decaia com maior rapidez.

4.4. Alterações causadas na dose que maximiza a resposta ao considerar na função a fertilidade inicial do solo.

O conhecimento da dose de fertilizante que maximiza a resposta é de grande importância para a determinação da dose de adubo economicamente recomendável, conforme foi demonstrado no capítulo anterior. Assim as alterações que porventura venha a sofrer aquela se refletirão nesta.

Nesta seção se apresentam as doses de fertilizante, calculadas

pelos métodos descritos anteriormente, que maximizam a resposta, afim de poder avaliar suas variações.

No quadro 9 pode-se notar que a dose de fertilizante que maximiza a resposta não sofre alterações com a introdução, na função de resposta, do parâmetro fertilidade inicial do solo, independentemente do método de determinação usado. As pequenas discrepâncias existentes entre os valores de $X_{\text{máx}}$ podem ser atribuídas ao erro experimental.

O quadro 9 também indica que a função de raiz quadrada atinge seu máximo, isto é, estima a produção máxima, a níveis de insumo menores que o polinômio de segunda ordem. Ademais a variação entre os valores de $X_{\text{máx}}$ das diversas repetições é mais acentuada na função de raiz quadrada que na quadrática.

4.5. Estimação da máxima resposta

Nesta seção se apresentam as produções máximas previstas pelas funções quadrática e de raiz quadrada por serem as únicas equações que proporcionaram um grau de ajustamento adequado em relação às produções observadas no experimento de campo. No quadro 10 se apresentam as produções máximas apenas para o caso em que se omite na função o parâmetro fertilidade inicial do solo, visto que sua introdução na função de resposta não causa alterações na dose de adubo que maximiza a resposta, conforme foi observado na seção 4.4, logo também não provoca alterações no valor da produção estimada.

Quadro 9. Doses de P_2O_5 (kg/ha) a aplicar para obter a máxima resposta no caso das funções quadrática e de raiz quadrada, quando não se considera a fertilidade inicial do solo ($\hat{\delta}_0$) e quando se introduz na equação este parâmetro, estimado matematicamente ($\hat{\delta}_m$) e por quatro métodos de análise química.

FUNÇÃO QUADRÁTICA						
Repetição	$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_m$	Método de análise química do solo			
			Egner-Riehm	Bray 1	Mehlich	Olsen
S 1	213,53	213,62	213,68	214,95	215,05	214,84
S 2	210,67	210,52	210,84	211,40	211,21	210,00
S 3	252,73	252,31	255,54	257,16	252,80	251,67
R 1	263,46	263,75	264,50	264,10	263,25	263,21
R 2	269,62	269,90	269,00	269,25	270,07	269,36
R 3	261,84	261,18	258,58	261,92	259,29	261,23
FUNÇÃO DE RAIZ QUADRADA						
S 1	168,43	176,58	178,25	176,81	175,34	175,24
S 2	166,90	172,11	174,85	173,85	172,79	169,83
S 3	205,72	210,85	215,21	211,96	211,63	209,69
R 1	227,10	248,95	233,92	231,95	231,52	229,58
R 2	252,05	259,61	252,46	251,57	252,49	251,75
R 3	252,05	257,35	243,12	253,55	252,48	249,44

Quadro 10. Produções máximas estimadas (kg/ha de açúcar), em cada repetição, pelas funções quadrática e raiz quadrada.

Repetição	T i p o d e F u n ç ã o	
	Quadrática	Raiz Quadrada
S 1	18.505,50	18.240,00
S 2	15.801,20	16.133,60
S 3	16.851,40	17.027,10
Média	17.052,70	17.133,60
R 1	16.467,80	15.976,60
R 2	16.851,70	16.318,10
R 3	14.575,60	14.179,90
Média	15.965,03	15.491,50

O quadro 10 indica que as produções máximas estimadas pela função quadrática, em geral, são um pouco superiores as previstas pela função de raiz quadrada. Este fato está relacionado com as observações registradas na seção 4.1. onde dizíamos que "o incremento da produção por unidade de insumo é bem maior na função de raiz quadrada, mas quando as quantidades de adubo aplicadas aumentam, inverte-se a situação" e a curva descrita pelo polinômio de segunda ordem quase sempre ultrapassa o ponto máximo da função de raiz quadrada. Entretanto, nota-se que, no caso particular em estudo, a diferença

entre as produções máximas, estimadas pelas duas funções, para uma mesma repetição, nunca ultrapassou os 600 kg/ha.

4.6. Correlação existente entre a quantidade de nutriente nativo do solo, estimada matematicamente e por análise química.

Nesta seção se apresentam as correlações existentes entre as diversas determinações da fertilidade inicial do solo, cujo conhecimento é de fundamental importância para a seleção do método de análise química.

Quadro 11. Matriz de correlações (\hat{R}) entre os valores de P_2O_5 nativo do solo, determinados através de dois modelos de resposta: quadrático (Q) e raiz quadrada (RQ); e por quatro métodos de análise química: Egner-Riehm (ER), Bray 1 (B), Mehlich (M) e Olsen (OL).

	Q	RQ	ER	B	M	OL	
R =	1,00	0,83	- 0,33	- 0,49	0,10	0,47	Q
		1,00	- 0,16	- 0,33	0,24	0,49	RQ
			1,00	0,90	- 0,42	0,21	ER
				1,00	- 0,08	0,22	B
		Simétrica			1,00	0,08	M
						1,00	OL

O quadro 11 indica que existe uma alta correlação positiva entre o conteúdo inicial de P_2O_5 no solo estimado pelas funções qua-

drática e de raiz quadrada. Entre os métodos de análise química do solo, observa-se que existe alta correlação positiva entre as determinações feitas pelos métodos Egner-Riehm e Bray 1 e correlação positiva baixa do método de Olsen com os demais. Por outro lado nota-se que as correlações entre os valores estimados pelos modelos de resposta e as determinações químicas são positivas em alguns casos e negativas em outro, sendo que a melhor correlação positiva ocorre entre os valores estimados pela função de raiz quadrada e aqueles determinados pelo método de Olsen.

5. DISCUSSÃO

O modelo matemático a ser usado para o ajustamento da curva de resposta depende em grande parte das doses extremas de fertilizante aplicado. Se o nível máximo de adubo aplicado não chega a produzir o decaimento da curva, se pode esperar que os modelos assintóticos e crescentes ofereçam melhor possibilidade de ajustamento. Por outro lado se as doses extremas usadas chegam a produzir o decaimento da curva de resposta, os modelos simétricos do tipo polinomial de segundo grau poderiam lograr um melhor ajustamento, apesar de apresentar algumas desvantagens devidas à restrição de simetria. Este caso ocorreu com os dados analisados neste estudo, onde as doses extremas de adubo fosfatado aplicadas foram suficientemente altas para provocar o decaimento da curva, por esta razão a função quadrática e a de raiz quadrada resultaram melhores no que se refere ao ajustamento da curva. Entretanto, o ajustamento da curva, julgado somente com base na magnitude de R^2 , não parece ser o melhor critério, pois seria conveniente considerar outros componentes da função de produção, tal como a fertilidade inicial do solo, que é o objetivo fundamental deste estudo.

A quase totalidade dos trabalhos existentes sobre o assunto tem por objetivo a determinação da dose de adubo economicamente recomendável e por esta razão tais pesquisadores trabalham somente com a parte da curva situada no quadrante positivo dos eixos cartesianos, não considerando, portanto, a fertilidade inicial do solo. Entretanto, surgia a dúvida sobre a precisão da dose máxima de

adubo e da dose ótima recomendável, calculadas desta forma. No presente estudo ficou comprovado de que o fato de tomar em conta, na função de produção, o nutriente nativo do solo, seja estimado de forma direta por meio do ajustamento da curva de resposta, seja determinado por análise química do solo, não produz alterações significativas na dose máxima de fertilizante a aplicar. Como a dose ótima recomendável é uma função da dose máxima, deduz-se que aquela tampouco seria afetada ao introduzir no modelo o parâmetro "fertilidade inicial do solo". Daí podemos concluir que, em estudos em que está envolvida a dose máxima de adubo recomendável, não há necessidade de considerar o nutriente nativo do solo, bastando buscar um modelo matemático que proporcione o melhor ajustamento em relação às produções observadas. Em casos desta natureza, em geral se usa uma função quadrática por proporcionar um grau de ajustamento satisfatório e por simplificar consideravelmente os cálculos. Entretanto, se as produções são exclusivamente crescentes a equação de Mitscherlich poderia proporcionar um melhor ajustamento.

A parte da curva de resposta, situada à esquerda do eixo dos Y, pode ser de grande interesse quando o objetivo do trabalho é selecionar e calibrar um método de análise química do solo ou quando se estuda o efeito residual de um fertilizante. Nestes casos não seria suficiente selecionar um modelo matemático que proporcionasse um ajustamento satisfatório, baseados exclusivamente na magnitude do valor de R^2 . Há necessidade de tomar em consideração as propriedades de cada modelo no que se refere a magnitude dos valores

estimados para a fertilidade inicial. No presente estudo a função quadrática revela sua característica de sobrestimar o conteúdo inicial de um nutriente no solo, critério este, baseado no fato prático de que altas concentrações de sais no solo causariam o desequilíbrio fisiológico da planta. Em estudos deste tipo, o modelo quadrático não seria apropriado, embora proporcione um ótimo ajustamento.

No presente estudo, a função de raiz quadrada parece estimar valores bastante reais para o conteúdo de P_2O_5 do solo, em forma assimilável às plantas. Uma das características da função de raiz quadrada é a sua sensibilidade em determinar pequenas variações na fertilidade do solo o que não sucede com os métodos de análise química, considerados neste estudo. Infelizmente, o tipo de dados provenientes do experimento de campo não permitiu um ajustamento satisfatório dos modelos assintóticos e crescentes, logo não há informação suficiente para avaliar sua eficiência na estimativa da fertilidade inicial do solo.

A observação das produções obtidas nas repetições S4 e R4 indica que a curva, descrita pelo polinômio de segunda ordem ou pela função de raiz quadrada, apresenta um mínimo o que constitui uma anomalia devida ao erro experimental. Essas repetições não foram consideradas para o ajustamento da curva de resposta.

Quanto aos métodos de análise química utilizados para a determinação de fósforo disponível no solo, pode-se afirmar que sua sensibilidade em detectar pequenas diferenças na fertilidade do solo, entre as unidades experimentais, é bem inferior a revelada pela

função de resposta. No que concerne ao presente estudo, nota-se que o método de Olsen é o que proporciona a melhor correlação em relação aos valores estimados pela função de raiz quadrada. O valor do coeficiente de correlação, aproximadamente igual a 0,50, pode parecer um pouco baixo a primeira vista, mas isto poderia ser explicado pela alta variância ($s^2 = 2.254,18$) dos valores estimados pela função de raiz quadrada em relação a variância ($s^2 = 2,54$) observada no método de Olsen.

Balerdi, Müller e Fassbender (4), entretanto, em um trabalho sobre comparação de cinco métodos químicos de análise de fósforo disponível, usando 104 solos da América Central, entre os quais o da série Instituto, concluíram que o método mais eficiente era o de Egner-Riehm, seguindo-se os métodos de Olsen, Bray 1 e Mehlich. Cabe destacar que os citados pesquisadores trabalharam em casa de vegetação, usando o tomate como planta indicadora. Seatz e Stanberry (37) declaram que: "A natureza complexa do fósforo do solo tem tornado difícil caracterizá-lo no solo e avaliar sua disponibilidade para as plantas. Tentativas tem sido feitas para caracterizar o P do solo e para relacionar essas descobertas com sua disponibilidade para a planta, mas muitas falhas são inerentes aos métodos usados e todos carecem de universalidade, quanto a sua aplicação e precisão. Espécies de plantas e mesmo variedades diferem grandemente quanto a sua capacidade de obter fósforo suficiente a partir de solos com baixa disponibilidade de P, determinado por análise química". Ademais de variar com o tipo de cultivo, a disponibilidade

de de fósforo está relacionada com as propriedades físicas e químicas do solo, tais como: aeração, compactação, umidade, temperatura, tamanho das partículas, pH, conteúdo de matéria orgânica, deficiência ou presença de certos elementos (37). Cabe destacar ainda que a eficiência dos métodos de análise química de fósforo disponível está muito relacionada com as formas de fosfato predominantes no solo (4).

As considerações anteriores demonstram a necessidade de selecionar e calibrar os métodos de análise química de fósforo disponível de acordo com o tipo de solo e a espécie cultivada, afim de melhorar sua eficiência.

Baseando-se exclusivamente nas condições de solo, clima e cultivo existentes no presente estudo, o método químico mais eficiente para a determinação de fósforo disponível seria o de Olsen. É interessante destacar que o método de Olsen quase sempre detectou menores quantidades de fósforo disponível no solo que o modelo matemático. Entretanto, as quantidades detectadas pelo método de Olsen são grandemente afetadas pela temperatura e pela velocidade de agitação (30).

6. CONCLUSÕES

- 1) As funções quadrática e de raiz quadrada proporcionam um melhor ajustamento que os modelos assintóticos e crescentes, quando as doses extremas de adubo aplicadas provocam o decaimento da curva de resposta.
- 2) Se o nível máximo de fertilizante aplicado não chega a produzir o decaimento da curva, os modelos assintóticos e crescentes oferecem melhores possibilidades de ajustamento.
- 3) Se o centro de interesse é a estimação da quantidade de nutriente, existente no solo em forma assimilável às plantas, o polinômio de segundo grau na variável transformada (ex.: transformação de raiz quadrada) dá uma estimação mais real que a função quadrática sem nenhuma transformação.
- 4) A introdução do parâmetro "fertilidade inicial do solo" na função de resposta não afeta significativamente o valor da dose máxima de adubo a recomendar, nem o valor da dose economicamente recomendável.
- 5) A estimação do conteúdo inicial de um nutriente no solo, em forma assimilável às plantas, por meio do ajustamento da curva de resposta, poderia ser um novo meio para estudar o efeito residual de fertilizantes ou para escolher e calibrar métodos de análise química do solo.

- 6) Para o caso particular do cultivo de cana de açúcar, nas condições do experimento de campo, o método de Olsen demonstrou ser o mais eficiente na determinação do conteúdo de fósforo disponível no solo, a julgar por sua correlação com os valores estimados diretamente da função de resposta.

RESUMO

O presente trabalho foi realizado em um solo da série Instituto, em Turrialba, Costa Rica, onde se havia instalado um experimento de adubação fosfatada de cana de açúcar. As doses de P_2O_5 aplicadas foram de 40, 165, 290 e 415 kg/ha e a resposta foi medida em termos de produção de açúcar por hectare.

Os objetivos do estudo foram: 1) selecionar o modelo matemático mais apropriado para a descrição da curva de resposta, sob condições locais; 2) determinar a dose de adubo que dá a máxima produção e sua relação com a dose economicamente recomendável; 3) as alterações causadas na dose máxima recomendável ao introduzir, na função de produção, o parâmetro "conteúdo de nutriente disponível no solo", detectado por análise química e pela curva de resposta; 4) verificar a correlação entre a quantidade de nutriente disponível no solo, detectada por análise química e pela curva de resposta.

As seguintes funções de produção foram consideradas: 1) polinômio de segundo grau; 2) função de raiz quadrada; 3) equação de Mitscherlich; 4) função de Cobb-Douglas e 5) função exponencial. O ajustamento das curvas de resposta foi realizado pelo método de estimação de "mínimos quadrados não lineares". O conteúdo de fósforo disponível no solo foi determinado por quatro métodos de análise química: Egner-Riehm, Bray 1, Olsen e Mehlich (Carolina do Norte).

Observou-se que as funções quadrática e de raiz quadrada proporcionam um ótimo ajustamento, quando as doses extremas de adubo

aplicadas causam o decaimento da curva de resposta. Entretanto, se o nível extremo de fertilizante aplicado não chega a produzir o decaimento da curva, os modelos assintóticos e crescentes oferecem melhores possibilidades de ajustamento.

A função polinomial de raiz quadrada parece estimar valores mais reais da fertilidade inicial do solo que o polinômio de segunda ordem. Observou-se também que, a pequenas aplicações de adubo, o incremento da produção por unidade de insumo foi bem maior na função de raiz quadrada que na quadrática. Entretanto, quando aumentam as quantidades de fertilizante aplicadas, inverte-se a situação. A função de raiz quadrada estimou a produção máxima a níveis de insumo inferiores que o polinômio de segundo grau.

Como era de se esperar, observou-se que a dose economicamente recomendável é função do nível de adubo que maximiza a produção. Ademais se constatou que a introdução do parâmetro "fertilidade inicial do solo", na função de resposta, não afeta significativamente o valor da dose máxima de adubo a recomendar, nem o valor da dose economicamente recomendável.

Para o caso particular de cultivo de cana de açúcar, nas condições do experimento de campo, o método de Olsen parece ser o mais eficiente na determinação do conteúdo de fósforo disponível no solo, a julgar por sua correlação com os valores estimados diretamente da função de resposta.

A estimação do conteúdo inicial de um nutriente no solo, em forma assimilável às plantas, por meio do ajustamento da curva de resposta, poderia ser um novo meio para estudar o efeito residual de fertilizantes ou para selecionar e calibrar métodos de análise química.

RESUMEN

El presente trabajo fue llevado a cabo en un suelo de la serie Instituto, en Turrialba, Costa Rica, donde se había establecido un experimento de fertilización fosfatada en caña de azúcar. Las dosis de P_2O_5 aplicadas fueron de 40, 165, 290 y 415 Kg/Ha y la respuesta fue medida en términos de producción de azúcar por hectárea.

Los objetivos del estudio fueron: 1) seleccionar el modelo matemático más apropiado para la descripción de la curva de respuesta, bajo condiciones locales; 2) determinar la dosis de abono que maximiza la producción y su relación con la dosis económicamente recomendable; 3) estudiar las alteraciones causadas en la dosis máxima recomendable al introducir, en la función de producción, el parámetro "Contenido de nutriente disponible en el suelo", detectado por análisis químico y por la curva de respuesta; 4) verificar la correlación entre la cantidad de nutriente disponible en el suelo, detectada por análisis químico y por la curva de respuesta.

Las siguientes funciones de producción fueron consideradas: polinomio de segundo grado; función de raíz cuadrada; ecuación de Mitscherlich; función de Cobb-Douglas y función exponencial. El ajuste de las curvas de respuesta se efectuó por el método de estimación de "mínimos cuadrados no lineales". El contenido de fósforo disponible en el suelo fue determinado por cuatro métodos de análisis químico: Egner-Riehm, Bray 1, Olsen y Mehlich (Carolina del Norte).

Se observó que las funciones cuadrática y de raíz cuadrada proporcionan un ajuste óptimo, cuando las dosis extremas de abono aplicadas causan la declinación de la curva de respuesta. Sin embargo, si el nivel extremo de fertilizante aplicado no llega a producir la declinación de la curva, los modelos asintóticos y crecientes ofrecen mejores posibilidades de ajuste.

La función polinomial de raíz cuadrada parece estimar valores más realísticos de la fertilidad inicial del suelo que el polinomio de segundo orden. Se observó también que, a pequeñas aplicaciones de abono, el incremento de la producción por unidad de insumo fue mucho mayor en la función de raíz cuadrada que en la cuadrática. Sin embargo, cuando aumentan las cantidades de fertilizante aplicadas, se invierte la situación. La función de raíz cuadrada estimó la producción máxima a niveles de insumo inferiores que el polinomio de segundo grado.

Como es de esperarse, se observó que la dosis económicamente recomendable es función del nivel de abono que maximiza la producción. Además se constató que la introducción del parámetro "Fertilidad inicial del suelo" en la función de respuesta no afecta mayormente el valor de la dosis máxima de abono a recomendar, ni el valor de la dosis económicamente recomendable.

Para el caso particular del cultivo de caña de azúcar, en las condiciones del experimento de campo, el método de Olsen parece ser el más eficiente en la determinación del contenido de fósforo disponible en el suelo, a juzgar por su correlación con los valores

estimados directamente de la función de respuesta.

La estimación del contenido inicial de un nutriente en el suelo, en forma asimilable para las plantas, por medio del ajuste de la curva de respuesta, podría ser un nuevo medio para estudiar el efecto residual de fertilizantes o para seleccionar y calibrar métodos de análisis químico.

SUMMARY

The present study was carried out on a soil of the series "Instituto", in Turrialba, Costa Rica, where a sugar-cane fertilization experiment was established, with application of phosphorus. The levels of P_2O_5 applied were 40, 165, 290 and 415 Kg/Ha and the response was measured as kilogram of sugar per hectare.

The objectives of this research were the following: 1) To select a mathematical model that best described the response curve; 2) To estimate the level of fertilizer which maximizes the response, furthermore to establish the relationship between the estimated maximum level and the most profitable level of fertilizer; 3) To observe the effect due to the initial level of nutrients on the optimum rate. The initial level of nutrients were obtained by chemical analysis and direct estimation from the response curve; 4) and finally to estimate the correlation between available phosphorus detected in the soil by chemical analysis and that estimated by direct statistical procedure.

In this study the following production functions were considered: the second order polynomial, the square root model, the Mitscherlich equation, the Cobb-Douglas function and the exponential response law. The estimation of the parameters was obtained by the non-linear least square estimation procedure. The methods of chemical analyses to determine the amount of phosphorus available in the soil were: Egner-Riehm, Bray 1, Olsen y Mehlich (North Carolina).

In the light of the results, it can be said that quadratic and square root function allow better fitting whenever the level of application was large enough and the response curve showed a decrease to high doses. Nevertheless, if the level applied does not diminish the response the asymptotic and nondecreasing models could offer better fitting.

The square root model seems to yield a more realistic estimate of the initial amount of nutrient available in the soil than that estimated by the second order model. It must be also pointed out that at small rate of application of fertilizer the yield increase per unit of input faster in the square root model than that detected by the second order model. However this situation is reverted when the rate of application is high. On the other hand the estimate maximum detected by the square root model is lower than that detected by the second order model.

The most profitable level of fertilizer is a function of the theoretical maximum, and apparently is not very much affected by the initial level of soil nutrient.

Under the particular condition of the experiment and using the response of sugar cane to detect initial phosphorus level in the soil, it seems that chemical method of analysis given by Olsen yield a good estimate of the phosphorus content in the soil, judging the result by the value of the correlation between both estimates.

Finally the estimation of initial soil nutrients, from the -

observed response opens a new horizon for estimating the residual effect of fertilizer and perhaps the method can be used with advantages to calibrate methods of chemical analysis.

LITERATURA CITADA

1. BAIRD, B. E. e MASON, D. D. Multivariable equations describing fertility-corn yield response surfaces and their agronomic and economic interpretation. *Agronomy Journal* 51(3): 152-156. 1959.
2. BALBA, A. M. e BRAY, R. H. The application of the Mitscherlich equation for the determination of plant composition due to fertilizer increments. *Soil Science Society of America Proceedings* 20(4):515-518. 1956. ✓
Mitscherl.
3. _____ e HALEY, L. E. Comparison of results obtained by the Balba-Bray equation and radioactive techniques for the determination of nutrient uptake by plants from different nutrient forms. *Soil Science* 82(5):365-368. 1956. 22 a
4. BALERDI, F., MÜLLER, L. e FASSBENDER, H. W. Estudio del fósforo en suelos de América Central. III. Comparación de cinco métodos químicos de análisis de fósforo disponible. *Turrialba* 18(4):348-360. 1968.
5. BRAY, R. H. Soil-plant relations. I. The quantitative relation of exchangeable potassium to crop yields and to crop response to potash additions. *Soil Science* 58:305-324. 1944.
6. _____. A nutrient mobility concept of soil-plant relationships. *Soil Science* 78(1):9-22. 1954.
7. _____. The correlation of a phosphorus soil test with the response of wheat through a modified Mitscherlich equation. *Soil Science Society of America Proceedings* 22(4):314-317. 1958. ✓
Mitscherl.
8. _____ e KURTZ, L. T. Determination of total, organic, and available forms of phosphorus in soils. *Soil Science* 59:39-45. 1945.
9. BROWN, W. G., JACKSON, T. L. e PETERSEN, R. G. A method for incorporating soil test measurements into fertilizer response functions. *Agronomy Journal* 54(2):152-154. 1962.
10. _____ et al. Production functions, isoquants, isoclines and economic optima in corn fertilization for experiments with two and three variable nutrients. *Iowa Agricultural Experiment Station. Research Bulletin* nº 441. 1956. pp. 807-832.

11. CAREY, T. M. e ROBINSON, P. The manuring of sugar-cane. Empire Journal of Experimental Agriculture 21(82): 99-115. 1953.
12. COLWELL, J. D. Calibration and assesment of soil tests for estimating fertilizer requirements. I. Statistical models and tests of significance. Australian Journal of Soil Research 5(2):275-293. 1967.
13. _____ . Calibration and assessment of soil tests for estimating fertilizer requirements and an evaluation of soil testing. Australian Journal of Soil Research 6(1): 93-103. 1968.
14. _____ e ESDAILE, R. J. The application of production function analysis for the estimation of fertilizer requirements of wheat in northern New South Wales. Australian Journal of Experimental Agriculture and Animal Husbandry 6(23):418-424. 1966. ✓/5.
15. _____ e ESDAILE, R. J. The calibration, interpretation, and evaluation of tests for the phosphorus fertilizer requirements of wheat in northern New South Wales. Australian Journal of Soil Research 6(1):105-120. 1968.
16. CROWTHER, E. W. e YATES, F. Fertilizer policy in wartime: fertilizer requirements of arable crops. Empire Journal of Experimental Agriculture 9(34):77-97. 1941.
17. DOLL, J. P., HEADY, E. O. e PESEK, J. T. Fertilizer production functions for corn and oats; including an analysis of irrigated and residual responses. Iowa Agricultural Experiment Station. Research Bulletin n^o 463. 1958. pp. 361-394. ✓/5.
18. FASSBENDER, H. W. Estudio comparativo de dos fertilizantes fosfatados y determinación de la dosis óptima de fertilización de caña de azúcar en el IICA-CEI. Turrialba, IICA, 1969. 9 p. (mimeo).
19. GOMES, F. P. The use of Mitscherlich's regression law in the analysis of experiments with fertilizers. Biometrics 9(4):498-516. 1953.
20. _____ . On a formula for the estimation of the optimum dressing of a fertilizer. Biometrics 17(3):492-494. 1961.

21. GOMES, F. P. e ABREU, C. P. DE. Sobre uma fórmula para o cálculo da dose mais econômica de adubo. Anais da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz (Brasil) 16:191-198. 1959.
22. _____ e MALAVOLTA, E. Aspectos matemáticos e estatísticos da lei de Mitscherlich. Anais da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz (Brasil) 6:193-229. 1949. ✓
mit
ca
23. HAGIN, J. On the shape of the yield curve. Plant and Soil 12(3):285-296. 1960. ✓
21.9
24. HARDY, F. The soils of the I.A.I.A.S. area (Turrialba, Costa Rica). Turrialba, IICA, 1961. 76 p. (mimeo).
25. HEADY, E. O. e DILLON, J. L. Agricultural production functions. Ames, Iowa State University Press, 1961. 667 p.
26. _____, PESEK, J. T. e BROWN, W. G. Crop response surfaces and economic optima in fertilizer use. Iowa Agricultural Experiment Station. Research Bulletin nº 424. 1955. pp. 293-332.
27. _____, PESEK, J. T. e MCCARTHY, W. O. Production functions and methods of specifying optimum fertilizer use under various uncertainty conditions for hay. Iowa Agricultural Experiment Station. Research Bulletin nº 518. 1963. pp 921-939. ✓
28. HODNETT, G. E. The responses of sugar-cane to fertilizers. Empire Journal of Experimental Agriculture 24(93):1-19. 1956.
29. MALAVOLTA, E. Manual de química agrícola; adubos e adubação. 2a ed. São Paulo, Ceres, 1967. 606 p.
30. OLSEN, S. R. e DEAN, L. A. Phosphorus. In Black, C. A. et al, eds. Methods of soil analysis. Madison, Wisconsin, American Society of Agronomy, 1965. v. 2, pp. 1035-1049.
31. PANSE, V. G., SAHARABUDHE, V. B. e MOKASHI, V. K. Co-ordinated manurial trials on rainfed cotton in peninsular India. Indian Journal of Agricultural Science 21(2):113-135. 1951. ✓
at
32. PESEK, J. T., HEADY, E. O. e VENEZIAN, E. Fertilizer production functions in relation to wheather, location, soil and crop variables. Iowa Agricultural Experiment Station. Research Bulletin nº 554. 1967. pp. 977-1026. ✓

33. PESEK, J. T. et al. Production surfaces and economic optima for corn yields with respect to stand and nitrogen levels. Iowa Agricultural Experiment Station. Research Bulletin nº 472. 1959. pp. 593-616.
34. RANGANATHAN, V. et al. Studies on the applicability of Mitscherlich-Bray equation for correlating crop responses. Fertilité (França) nº 33:31-42. 1969.
35. SANCHEZ DE LA PUENTE, L. Estudios sobre la ley de Mitscherlich. I. Aplicación al efecto del nitrógeno sobre el trigo cultivado en el campo. Anales de Edafología y Agrobiología (Espanha) 25:183-192. 1966.
36. _____. Estudios sobre la ley de Mitscherlich. II. Comparación de la urea y el fertilizante nitrogenado mineral en experimentos de campo. Anales de Edafología y Agrobiología (Espanha) 26:1439-1449. 1967.
37. SEATZ, L. F. e STANBERRY, C. O. Advances in phosphate fertilization. In McVickar, M. H. et al., eds. Fertilizer technology and usage. Madison, Wisconsin, American Society of Agronomy, 1963. pp. 155-187.
38. SPILLMAN, W. J. Application of the law of diminishing returns to some fertilizer and feed data. Journal of Farm Economis 5(1):36-52. 1923.
39. _____. Use of the exponential yield curve in fertilizer experiments. U. S. Department of Agriculture. Technical Bulletin nº 348. 1933. 66 p.
40. VAN DER PAAUW, F. Critical remarks concerning the validity of the Mitscherlich law. Plant and Soil 4(2):97-106. 1952.
41. VOSS, R. e PESEK, J. T. Estimation of effect coefficients relating soil test values and units of added fertilizer. Agronomy Journal 54(4):339-344. 1962.
42. WALKER, W. M. e LONG, O. H. Effect of selected soil fertility parameters on soybean yields. Agronomy Journal 58(4):403-405. 1966.
43. WILLCOX, O. W. Verification of the Mitscherlich effect law. Agronomy Journal 41(6):225-229. 1949.

A P Ê N D I C E S

Quadro 1. Produção de açúcar (kg/ha) por sub-parcela, de acordo com a dose de P_2O_5 (kg/ha) aplicada.

Repetição	Sub-parcela	P_2O_5 aplicado	Açúcar	Repetição	Sub-parcela	P_2O_5 aplicado	Açúcar
S 1	26	40,00	15.077,80	R 1	32	40,00	8.740,90
S 1	28	165,00	17.933,00	R 1	29	165,00	14.843,50
S 1	27	290,00	17.463,60	R 1	30	290,00	16.505,20
S 1	25	415,00	14.078,50	R 1	31	415,00	12.885,90
S 2	24	40,00	12.580,80	R 2	17	40,00	13.124,70
S 2	21	165,00	16.564,20	R 2	19	165,00	14.444,50
S 2	22	290,00	14.197,00	R 2	18	290,00	18.354,80
S 2	23	415,00	11.961,50	R 2	20	415,00	14.656,90
S 3	10	40,00	12.772,40	R 3	5	40,00	12.983,90
S 3	11	165,00	17.877,20	R 3	6	165,00	12.645,70
S 3	9	290,00	15.213,10	R 3	8	290,00	16.058,90
S 3	12	415,00	15.316,10	R 3	7	415,00	13.046,10
S 4	1	40,00	14.005,90	R 4	14	40,00	11.136,20
S 4	2	165,00	12.717,90	R 4	15	165,00	10.208,20
S 4	4	290,00	14.082,60	R 4	16	290,00	11.037,20
S 4	3	415,00	14.971,10	R 4	13	415,00	13.363,00

Observação: A letra S designa as repetições, cujas sub-parcelas receberam superfosfato triplo e a letra R, as repetições cujas sub-parcelas foram adubadas com fosfato de Renania.

Quadro 2. Conteúdo de P_2O_5 (kg/ha) de cada unidade experimental, determinado por quatro métodos de análise química do solo..

Repetição	Sub-parcela	Método de Análise Química do Solo			
		Egner-Riehm	Bray 1	Mehlich	Olsen
S 1	26	34,50	24,00	18,50	17,00
S 1	28	30,50	19,00	14,00	12,00
S 1	27	37,50	23,00	17,50	15,00
S 1	25	35,50	25,50	20,50	17,50
S 1	Média	34,50	22,87	17,62	15,37
S 2	24	32,00	20,50	17,00	13,00
S 2	21	33,50	19,50	14,00	17,50
S 2	22	30,50	16,00	16,00	13,50
S 2	23	30,50	19,00	16,00	15,00
S 2	Média	31,62	18,75	15,75	14,75
S 3	10	27,00	12,50	19,00	12,50
S 3	11	27,50	21,00	20,00	13,50
S 3	9	24,00	10,50	17,50	12,00
S 3	12	30,00	22,50	17,50	12,00
S 3	Média	27,12	16,62	18,50	12,50
S 4	1	33,50	18,50	20,50	17,00
S 4	2	27,00	16,00	17,50	12,00

Cont. Quadro 2.

Repetição	Sub-parcela	Método de Análise Química do Solo			
		Egner-Riehm	Bray 1	Mehlich	Olsen
S 4	4	36,50	23,00	21,00	15,50
S 4	3	33,00	16,00	19,00	12,50
S 4	Média	32,50	18,37	19,50	14,25
R 1	32	32,00	21,00	19,00	11,50
R 1	29	34,50	23,00	17,50	13,50
R 1	30	31,00	20,50	18,50	15,00
R 1	31	33,50	22,50	17,50	15,00
R 1	Média	32,75	21,75	18,12	13,75
R 2	17	36,00	22,50	17,50	14,50
R 2	19	33,50	22,50	17,50	13,50
R 2	18	30,00	16,00	15,50	10,00
R 2	20	33,00	17,50	15,50	10,50
R 2	Média	33,12	19,62	16,50	12,12
R 3	5	30,50	19,00	20,00	14,50
R 3	6	42,00	19,00	20,50	17,00
R 3	8	24,00	19,00	18,50	15,50
R 3	7	24,00	14,50	14,00	17,50
R 3	Média	30,12	17,87	18,25	16,12

Cont. Quadro 2.

Repetição	Sub-parcela	Método de Análise Química do Solo			
		Egner-Riehm	Bray 1	Mehlich	Olsen
R 4	14	33,00	20,50	20,50	19,00
R 4	15	41,00	20,50	16,00	13,50
R 4	16	30,50	22,00	21,00	15,50
R 4	13	30,50	21,00	20,00	17,00
R 4	Média	33,75	21,00	19,37	16,25

Observação: S = sub-parcelas adubadas com superfosfato triplo.

R = sub-parcelas adubadas com fosfato de Renania.

Quadro 3. Esquema do experimento de campo (parcelas divididas)

	Parcela I								Parcela II							
	25	26	27	28	29	30	31	32	30	31	32	33	34	35	36	
Bloco I	S-375	S - 0	S-250	S-125	R-125	R-250	S-125	R-125	R-250	R-375	R - 0					
Bloco II	R-0	R-250	R-125	R-375	S-125	S-250	S-125	S-125	S-250	S-375	S - 0					
Bloco III	S-250	S - 0	S-125	S-375	R-375	R - 0	R-375	R-375	R - 0	R-125	R-250					
Bloco IV	S-0	S-125	S-375	S-250	R - 0	R-125	R - 0	R - 0	R-125	R-375	R-250					

Observação: O número escrito no canto superior direito de cada retângulo representa o número da sub-parcela e o do centro, o tratamento (S = superfosfato triplo; R = fosfato de Renania).