

EFICIÊNCIA RELATIVA DE ALGUNS MÉTODOS DE  
ESTIMAÇÃO DE VOLUME

Por

Dilson Lima Amaral

Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas da OEA  
Centro de Ensino e Investigação  
Turrialba, Costa Rica

Março, 1970

EFICIÊNCIA RELATIVA DE ALGUNS MÉTODOS DE  
ESTIMAÇÃO DE VOLUME

Tese

Apresentada ao Conselho da Escola para Graduados  
como requisito parcial para obter o grau

de

Magister Scientiae

no

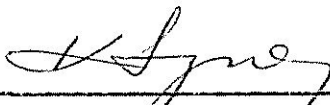
Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas da OEA

APROVADA:



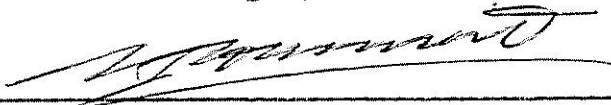
Gilberto Páez, Ph.D.

Conselheiro



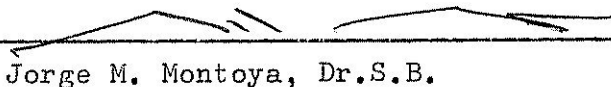
Kozen Igue, Ph.D.

Comitê



Luis Fournier, Ph.D.

Comitê



Jorge M. Montoya, Dr.S.B.

Comitê

Março, 1970

À memória dos meus pais  
Aos meus irmãos

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja fazer constar os sinceros agradecimentos ao Conselho Principal, Dr. Gilberto Páez, por sua constante orientação, ajuda e apóio prestado na realização dêste trabalho.

Aos demais membros do Comitê Conselheiro, Dr. Kozen Igue, Dr. Luis Fournier e Dr. Jorge M. Montoya, pelas sugestões e julgamento dados na consecussão da tese.

Ao Engenheiro Alfredo Vargas pela colaboração constante na estruturação e execussão do programa para os trabalhos de computação eletrônica.

Ao Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas da OEA e a Secretaria da Agricultura do Estado do Rio Grande do Sul por ter concedido-lhe as facilidades para a realização dos estudos de Pós-Graduação.

Aos professôres, colegas e amigos que de uma maneira ou outra contribuíram à realização dêste trabalho.

A Srta. Aiza Vargas por seu eficiente trabalho de datilografia da tese.

## BIOGRAFIA

O autor nasceu na cidade de Pôrto Alegre, Estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

Realizou seus estudos universitários na Faculdade de Agronomia e Veterinária da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, concluindo o curso de Engenheiro Agrônomo em 1964.

No ano de 1965 ingressou na Secretaria da Agricultura do Estado do Rio Grande do Sul, no Departamento de Produção Animal, realizando trabalhos de experimentos agrostológicos no Centro Agrônomo de Guaíba.

Em agosto de 1966 transferiu-se ao Departamento de Recursos Naturais Renováveis, onde passou a responder pela chefia do Serviço Florestal. No ano seguinte participou no projeto IBRA-IICA, para levantamento dos recursos naturais do Estado do Rio Grande do Sul.

Em setembro de 1968 ingressou no Instituto Interamericano de Ciências Agrícolas da OEA, Turrialba, Costa Rica, para estudos de Pós-Graduação, permanecendo até março de 1970.

## CONTEÚDO

	<u>Página</u>
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA .....	3
2.1. Antecedentes históricos da cubagem das árvores	3
2.2. Dificuldades na estimação do volume das árvores	5
2.3. A técnica da medição .....	7
2.4. Os mínimos quadrados como método de estimação	10
2.5. Outras considerações .....	10
2.6. Algumas fórmulas propostas para a estimação do volume .....	16
2.6.1. Função Polinomial .....	16
2.6.2. Função de Potência (logarítima) .....	17
2.6.3. Outras funções .....	17
3. MATERIAIS E MÉTODOS .....	18
3.1. Lei da relação polinomial entre volume, diâmetro e altura .....	18
3.2. Função de Cobb-Douglas ou fórmula de Schumacher .....	26
3.3. Método de ajustamento das curvas pelos "Mínimos Quadrados" .....	28
3.3.1. Método de mínimos quadrados linear ..	28
3.3.2. Estimação de parâmetros não-lineares pelo método de mínimos quadrados ...	32
3.4. Descrição dos dados de campo .....	35
3.4.1. Espécies de Costa Rica .....	36
3.4.2. Espécies de Panamá .....	36

	<u>Página</u>
3.4.3. <u>Pinus caribaea</u> .....	36
2.4.4. <u>Alnus jorullensis</u> , H.B.K. (Jaúl) ...	37
3.5. Procedimento utilizado neste estudo .....	49
4. RESULTADOS .....	50
4.1. Equação de predição do volume como função do DAP e da altura comercial .....	50
4.2. Contorno do desvio padrão dos modelos matemá- ticos .....	57
4.3. Confiabilidade do ajuste de curvas de acôrdio com o coeficiente de determinação .....	60
4.4. Razão do quadrado médio devido a regressão e quadrado médio da desviação do modelo ( $F$ múltiple) .....	62
4.5. Algumas considerações sôbre as tabelas de vo- lumes .....	64
5. DISCUSSÃO .....	67
6. CONCLUSÕES .....	72
7a. RESUMO .....	73
7b. RESUMEN .....	75
7c. SUMMARY .....	77
BIBLIOGRAFIA CITADA .....	79
APÉNDICE .....	82

## RELAÇÃO DE QUADROS

<u>QUADRO Nº</u>		<u>Página</u>
1.	Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 58 árvores de Costa Rica .....	38
2.	Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 41 árvores de Panamá .....	41
3.	Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 70 árvores de <u>Pinus caribaea</u> .....	43
4.	Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 30 árvores de <u>Alnus jorullensis</u> .....	47
5.	Equações de predição do volume para 4 espécies com o número de parâmetros total e ajustados .....	52
6.	Contorno do desvio padrão dos modelos matemáticos (S) para 11 fórmulas e 4 grupos de espécies .....	59
7.	Confiabilidade do ajuste de curvas de acordo com o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) para as 11 fórmulas e 4 grupos de espécies .....	61
8.	Razão do quadrado médio devido a regressão e quadrado médio da desviação do modelo (F múltiple) para 11 fórmulas consideradas e 4 espécies .....	63



## 1. INTRODUÇÃO

A estimação do volume das árvores por meio de tabelas volumétricas é uma prática, hoje em dia, universalmente conhecida. A exigência na construção de ditas tabelas provém da necessidade de conhecer-se o volume das árvores individuais, bem como, das populações boscosas de uma maneira mais rápida e eficiente. Sabe-se que o ponto de partida para os estudos de manejo florestal, em geral, já implica a determinação do volume das árvores, e essa tarefa só é possível, praticamente, por meio das tabelas de volumes.

As tabelas de volumes das árvores são construídas, em geral, dentro de determinadas condições específicas, tais como: espécies florestais, fases de crescimento, regime de exploração, localidades, tipos de solos, crescimento virgem, crescimento secundário, etc. Mesmo dentro destas considerações os tipos de tabelas variam de acordo ao número de variáveis que se toma em conta. Assim, por exemplo: as chamadas tabelas "locais" ou de simples entrada, que considera o volume da árvore como função do DAP (diâmetro a altura do peito) somente; as chamadas tabelas "padrões" ou de dupla entrada, que considera o DAP e a altura como variáveis independentes e, finalmente, as chamadas tabelas "formais" em que o volume é estimado a partir de determinação do fator forma.

Para a construção de tabelas volumétricas pode-se usar os métodos gráficos e os métodos matemáticos, também chamados "analíticos". Dentro dos métodos gráficos estão as curvas de harmonização, as

cartas de alinhamento e os monogramas. Nos métodos analíticos procura-se uma expressão matemática que relacione o volume das árvores com determinadas variáveis, mais frequentemente, com DAP e a altura. Os métodos matemáticos são considerados de maior precisão que os outros e, além disso, a interpretação ou a inferência das informações é feita pelos modernos procedimentos estatísticos.

Uma das dificuldades que se apresenta no problema das tabelas volumétricas das árvores, consiste em determinar até que ponto a aplicação de um mesmo método pode estender-se à condições ambientais e de espécies diferentes. Além disso, para poder empregar um método que seja o mais adequado, há necessidade de conhecer-se as relações que existem entre as variáveis que participam da característica buscada.

Ainda podemos considerar como problema o fato de existir uma moderada quantidade de métodos de construção de tabelas volumétricas, dos quais não é fácil eleger um que seja mais simples, objetivo e preciso para determinada situação.

O presente estudo tem os seguintes objetivos:

- 1) Comparar a eficiência relativa de vários métodos de estimação de volume de árvores, desenvolvendo alguns exemplos numéricos.
- 2) Precisar o limite de validade e confiabilidade dos diferentes métodos a usar.
- 3) Intentar a construção de tabelas de volumes para zona tropical.

## 2. REVISAO DE LITERATURA

### 2.1. Antecedentes históricos da cubagem das árvores

Spurr (37) cita que a história do cálculo do volume das árvores começou juntamente com a moderna ciência florestal em meados do século XVIII. Foi quando Kastner deu ênfase à fórmula de medida do volume das toras, que mais tarde, por volta de 1825, foi detalhada por Huber. Em 1791, Septfontaines usou para calcular o volume das toras a fórmula discutida, posteriormente, por Smalian na Alemanha e que agora é conhecida com o seu nome. Bonilla (5) cita que em 1804 Heinrich Cotta publicou a primeira tabela volumétrica moderna para o gênero *Fagus*, e treze anos mais tarde desenvolveu uma série de tabelas padrões. Nesse trabalho Cotta partiu do conceito que: "o volume da árvore depende do diâmetro, da altura e da forma; que quando o volume correto de uma árvore é determinado, êle é válido para todas as árvores do mesmo diâmetro, mesma altura e mesma forma".

Em meados do século XIX foram publicadas, na Alemanha, tabelas de volumes em "Forest-Mathematik", onde davam uma idéia do "status" das tabelas daquele país.

Conforme Wickenden (40) os métodos de quociente de forma absoluto, tabela de volume e tabelas de formas foram descobertas e organizadas pelo professor Tor Jonson em 1910. De acôrdo com a resenha e teoria do método descrito por aquêle autor, o volume e a forma das árvores de um dado diâmetro e uma altura é determinado totalmente por um

simples fator, qual seja, a razão entre dois diâmetros de um mesmo tronco. Os diâmetros maiormente escolhidos e mais convenientes para a classificação das árvores, de acôrdo com tal razão, são DAP e um diâmetro a meia distância do DAP ao topo do tronco. Para esta razão costuma-se chamar de "quociente de forma absoluto". Diz ainda, o autor, que não há diferença entre quociente de forma e classe de forma.

Segundo Baker (1), a primeira tabela de volume a ser usada foi construída simplesmente agrupando um grande número de árvores de diferentes tamanhos, mediando a escala de tôdas elas dentro da mesma classe de diâmetro e altura e daí harmonizando os volumes para as diferentes classes. Êste método foi descrito por Graves em 1906. Concluiu Baker que êste método é muito lento, além disso requer uma grande quantidade de dados e a harmonização gráfica necessária para fazer os valores uniformes, muitas vezes introduz imprecisão no resultado final. Em 1915 Borrows descreveu um novo método introduzindo curvas de forma - "taper curves" -, ou seja, curvas mostrando os valores médios da forma das árvores, sendo esta uma etapa de impacto na construção das primeiras tabelas de volumes. Tal processo foi tido como uma grande melhora sôbre os sistemas usados naquele tempo. Foi aceito como indubitavelmente certo e efetivo, apesar do tempo e labor que se gastava para obter as curvas necessárias.

Cunia (12) descreve os dois métodos mais antigos na construção de tabelas de volumes das árvores. Foram os métodos gráficos e cartas de alinhamento, os quais ainda, atualmente, se usam em muitos

casos com bons resultados. O autor afirma que a elegância e a objetividade das modernas computações estatísticas para ajustar as equações dá uma grande vantagem sôbre os outros dois métodos, mesmo que muitas vêzes os resultados não sejam necessariamente mais significativos.

## 2.2. Dificuldades na estimação do volume das árvores

Sendo a árvore um sólido geométrico complexo e bastante variável, torna-se difícil determinar seu volume com grande precisão.

Refere-se Hunger (30) que a medição do volume das árvores em pé é uma tarefa bastante difícil, mas a mais necessária de tôdas para os florestais. A dificuldade das medições das árvores em pé aparece não sômente porque muitas delas estão fora do nosso alcance, mas também porque nunca se encontram árvores completamente iguais, pois elas apresentam formas geométricas irregulas. O autor agrega que: um exame das nossas tabelas volumétricas mostram que elas são tão variáveis na construção como no número que existe. Algumas, por exemplo, são baseadas na altura comercial; outras na altura total. Algumas assume utilização para um diâmetro fixo do topo; para outros essa utilização é variável, não havendo um ponto fixo delimitado. Algumas descontam-se por estarem com defeitos ou quebras; outras são baseadas sômente em troncos normais. Algumas assumem uma altura padrão para as sapopembas; outras são indefinidas nesse ponto, e assim por diante.

De acôrdo com Gomes (17), a tabela de volume é um método

estatístico de estimar o volume das árvores isoladas, método utilizado hoje mais que outrora, na resolução do importante problema florestal de cubagem dos povoamentos boscosos. A dificuldade está em definir a lei da variação do volume médio com uma simplicidade e uma precisão que se ajustem às necessidades do ramo florestal, que se preocupa com as medições e com os planos de exploração dos arvoredos - quer em matéria de investigação, quer em matéria de aplicação.

Grosenbaugh, citado por Honer (22), afirmou textualmente o seguinte: "Desafortunadamente muitas tabelas de volumes foram construídas pelos métodos gráficos baseados em amostras mal selecionadas. Mesmo quando as tabelas de volumes eram construídas de amostras bem representativas de uma população específica, e mesmo quando a relação do volume era feita minimizando alguma soma dos quadrados residuais, as tabelas estavam prejudicadas por definição, quando aplicadas fora da população específica da qual a amostra era tirada - quase sempre assim acontecia".

Furnival (14) referiu-se que o problema inicial na escolha de uma equação apropriada pode ser extremamente enfadonho. Um grande número de equações há sido proposto para a construção de tabelas volumétricas e consideráveis dificuldades tem sido levantadas para decidir-se qual a mais confiável dentro de uma dada situação. O autor anota que o quadrado médio residual usado para comparar as equações não é apropriado para aquelas em que suas variáveis dependentes diferem. Como exemplo, dá as equações seguintes:

$$V = a + bD^2H \quad (\text{variável combinada}) \quad (1)$$

$$\log V = a + b \log H \quad (\text{Schumacher}) \quad (2)$$

Porisso usa um fator de ponderação  $(D^2H)^{-1}$  para a primeira equação. Comparando estas duas equações para dados artificiais chega a conclusão de que a equação (2) é mais apropriada para os dados em questão.

### 2.3. A técnica da medição

Uma das necessidades básicas das medições florestais está na maneira de determinar o volume das árvores. Considerando que é uma tarefa bastante árdua, quase impraticável, tomar as medidas precisas das árvores nos trabalhos florestais rotineiros, deve-se recorrer aos métodos de estimação, dentre os quais considera-se como o mais importante, o método de tabelas volumétricas (17).

Vincente (39) trabalhando com tabelas de volumes para espécies do gênero Shorea, emprega a equação de regressão do volume sobre a área basal, isto é, usa a área basal como variável independente na fórmula de estimação do volume.

Curró (13) considera que uma tabela de dupla entrada pode ser construída a partir da determinação do fator mórfico. Em estudos feitos com Populus, pode o autor determinar a equação de regressão múltipla, encontrando o valor de "f". Depois de encontrado "f", para obter o volume da árvore considerada, bastará multiplicá-lo pelo volume do cilindro de mesma área basal.

Em seu trabalho, Honer (22) cita que as técnicas usadas na

construção de tabelas volumétricas têm sido bastante variadas e que florestais alemães e americanos desempenharam grandes trabalhos no desenvolvimento de uma variedade de expressões de forma, "Form-Class", os quais chegaram a conclusão que a variação da mesma, entre e dentre as espécies, era considerável. Não obstante, muitas tabelas volumétricas foram preparadas com base em classes de forma e ainda são de grande uso em América do Norte.

De acôrdo com Spurr (37) um método ideal para a construção de tabelas de volumes seria aquêle método que reuna a simplicidade, objetividade e precisão. Entretanto, ainda nenhum método proposto preenche satisfatòriamente estas três condições.

Husch (23) através das comparações entre a técnica de construção de tabelas volumétricas por meio gráfico e de função matemática, conclui que a solução gráfica tem a vantagem de não requerer tantos conhecimentos matemáticos, ademais reduz as calculações. Porém, tem como desvantagem que a solução é muito subjetiva e para o ajuste da curva necessita-se muita habilidade. Além disso, para um resultado mais eficiente é necessário uma grande quantidade de dados.

Schumacher e Hall (36) discutindo os métodos de construção de tabelas de volumes sugerem a aplicação dos métodos gerais de regressão, regressando o volume sôbre o diâmetro e altura com base em expressões matemáticas. Os autores tentam mostrar que a comparação dos volumes das árvores entre espécies e localidades pode ser posto em uma base extritamente objetiva. Usam a fórmula geral de Cobb Douglas:



$$V = \beta_0 D^{\beta_1} H^{\beta_2}$$

transformando-a em uma expressão logarítima, da forma:

$$\log V = \log \beta_0 + \beta_1 \log D + \beta_2 \log H$$

Esta é uma expressão em que os expoentes e a constante podem ser estimados pelo método de mínimos quadrados linear.

Golding e Hall (16) sustentam que com o crescente uso de computadores eletrônicos para os cálculos de volume de árvores, o método de equação, tem suplantado largamente os métodos gráficos e monogramas. É que, além da vantagem do uso de computadores, elimina-se a tendência pessoal na construção das tabelas, difícil de evitar no caso dos outros métodos. Usando teste de precisão para 25 equações de volume para as espécies "jack-pine", "white spruce" e "trembling aspen" encontraram a equação da variável combinada como a de mais alta precisão e de mais fácil uso.

Meyer (28) em discussão do uso de equações algébricas para expressar a função do volume das árvores, salientou que os volumes observados deveriam ser ponderados, já que a variação absoluta do volume, por árvore, era maior para as árvores grandes do que para as pequenas. Recomendou a equação logarítima do volume porque todos os valores eram automaticamente ajustados em seus próprios pesos.

#### 2.4. Os mínimos quadrados como método de estimação

De acôrdo com Prodan (33), a maioria dos ajustes de curvas tem sido feito pelo método dos "quadrados mínimos". O princípio dêste método foi desenvolvido por Gauss, ao qual êle chamou de "método de quadrados mínimos da desviação da curva de ajuste". Assim que, por êste princípio a curva de ajuste deveria estar na condição de que as desviações dos valores observados para esta curva de ajuste ao quadrado sejam mínimas.

O método de quadrados mínimos é atualmente bastante usado e a grande aplicação dêste método é devido a isenção de alguma tendência subjetiva que pode ocorrer no método gráfico. Entretanto, a objetividade do ajuste matemático é algumas vêzes manchada pelo elemento pessoal na escolha da equação do volume. Quando se usa os quadrados mínimos para o ajuste da função de regressão do volume, a expressão matemática obtida será indubitavelmente superior e as constantes calculadas dará um melhor ajuste para a curva considerada (14).

#### 2.5. Outras considerações

De acôrdo com Bruce e Schumacher (8) as tabelas "standard" são preferidas sôbre as tabelas locais devido a que a estimação do volume das árvores, levando em conta sômente o diâmetro, não é tão preciso como quando se leva em conta o diâmetro e a altura, pois o volume é função, não só do diâmetro, como também da altura.

Segundo Chapman e Meyer (10) as árvores com idêntico DAP e

mesma altura total, mesmo dentro de uma mesma espécie, não têm necessariamente o mesmo volume. Uma tabela única de volume, que poderia ser aplicada para tôdas as condições e espécies é, portanto, impossível. A construção de uma tabela de volume simples, padrão para tôdas as espécies e sítios seria possível se o volume fôsse função sòmente do diâmetro e da altura. Entretanto existem outras variáveis que influem no volume, si bem que em menor escala.

Para sanar êsse problema tem-se construido as chamadas tabelas de volumes composta, "Composite volume tables", dado por Gevorkiantz e Olsen (15).

Bower (6) assinala que o volume das árvores depende de três variáveis: diâmetro, altura e forma. Que quando se considera sòmente o diâmetro e a altura na construção das tabelas de volumes, estas representam o volume das árvores de forma mediana daquelas que formaram a amostra, e sòmente serão aplicáveis às áreas florestais que possuem as mesmas formas médias das árvores da amostra. Quando estas tabelas forem aplicadas para um padrão de bosque que tenha diferente forma média, portanto não servirá. Bruce (7) trabalhando com quatro espécies de coníferas do oeste do Estados Unidos concluiu que o mais conveniente no preparo das tabelas volumétricas, é quando se toma em consideração as medidas de DAP e a altura total ou comercial a um limite fixo do topo, omitindo a adição do terceiro fator - fator de forma.

Cunia (12) considera três pontos importantes nas amostras das

árvores para a construção de tabelas volumétricas:

1) Distribuição normal do erro - que não tem muito efeito na estimação dos parâmetros, mas sim na probabilidade do teste de significância e limites de confiança.

2) Homogeneidade da variância - que sendo a variância do volume uma função do  $(DAP)^2$  e H, o desvio da verdadeira função de regressão do volume das árvores maiores terá um efeito desproporcional sobre a estimação dos coeficientes de regressão dos quadrados mínimos de uma amostra. Isto verifica-se porque o efeito é proporcional ao quadrado da desviação. Também, como outra consequência, não é possível o uso do teste de significância e limite de confiança.

3) Amostragem aleatória - que o mais usual nos inventários florestais é a amostragem estratificada, sistemática ou por conglomerado em vez de aleatório. Isso não traz grandes efeitos na estimação dos coeficientes de regressão, entretanto afeta o verdadeiro limite de confiança. Conclui finalmente em seu trabalho, que o uso do método de regressão dos quadrados mínimos ponderados não resolve todos os problemas de validade e eficiência nos cálculos das tabelas volumétricas, mas é o melhor método na estimação dos coeficientes de regressão linear, mesmo quando a população não seja normalmente distribuída.

Honer (22) avalia nove funções em que foi selecionada a função

$$V = \frac{D^2}{b_0 + \frac{b_1}{H}}$$

para expressar a relação volume-diâmetro-altura.

Nenhum processo de ponderação especial foi requerido, uma vez que a transformação permite igualar as variâncias sôbre tôda a amplitude dos dados. Esta função, de acôrdo com o autor, proveu estimativas confiáveis e os erros do volume foram independentes do tamanho das árvores.

Mavrex (27) sugere uma metodologia para a construção de tabelas volumétricas. Partiu da hipótese de que o volume é função monótona crescente do diâmetro e da altura. Nesse estudo usou a seguinte equação:

$$V = b_0 + b_1D + b_2D^2 + b_3H + b_4DH + b_5D^2H + b_6H^2 + b_7DH^2 + b_8D^2H^2$$

e o cálculo dos parâmetros foi feito pelo método de mínimos quadrados. Os dados foram tirados ao acaso de um bosque coetâneo de Araucaria angustifolia (pinus do Paraná).

Bonilla (5) faz comparações entre a equação da variável combinada e a equação logarítima de Schumacher. Usou amostras de uma única espécie, "Pinus Marítimo", e encontrou que as duas equações se ajustaram perfeitamente aos dados, porém que a fórmula da variável combinada demonstrou ser mais precisa que a de Schumacher.

Claughton-Mallin (11) refere-se a vários estudos feitos por investigadores florestais sôbre a forma do tronco de espécies coníferas e chegaram a seguinte conclusão:

1) A forma do tronco segue uma lei em que, no sentido amplo da palavra, é independente da idade, do DAP, da altura e também da qualidade do solo.

2) Para dar uma expressão da forma da árvore, uma equação matemática pode ser usada com grande vantagem quando se relacionam os diâmetros a diferentes alturas do tronco.

3) As árvores de um mesmo DAP e mesma altura podem variar em volume; para expressar esta variação idealizaram-se os fatores mórficos, que para serem determinados necessitam, primeiramente, computar-se cuidadosamente o volume das árvores. Hansen (19) afirma que em geral o fator forma diminui com o aumento na altura de uma árvore dentro de uma dada classe de diâmetro e aumenta com o aumento do diâmetro dentro de uma dada classe de altura.

Larson (24) estudando a forma do tronco das árvores notou que a razão de mudança do diâmetro com a altura do tronco é bastante variável. O autor propõe e discute em seu trabalho quatro teorias gerais da forma do tronco das árvores: 1) Teoria da condução da água; 2) Teoria nutricional; 3) Teoria mecânica e 4) Teoria hormonal.

De acordo com Behere (4) o fator mórfico pode ser considerado com base em três componentes. Em primeiro lugar devido a forma do tronco, isto é, de categoria neiloidal, conical ou paraboloidal. Em segundo lugar, conforme o quociente de forma, ou seja, a taxa de variação do diâmetro do tronco. E, finalmente, quanto a espessura da casca ao longo do tronco.

Pemberton (32) fazendo estudos em Sequoia sempervirens, Endl, chegou as seguintes conclusões: 1) a relação entre a espessura da casca e o diâmetro sobre a casca, em um dado ponto, é praticamente

constante para qualquer grupo de árvore; 2) para diferentes localidades esta relação varia muito pouco; 3) para a espécie em estudo a percentagem de casca foi de 27% do volume total do tronco.

Na zona tropical tem-se feito a cubagem das árvores em pé, na maioria dos casos por meio de fatores métricos ou certas tabelas que teoricamente deveriam dar o volume da madeira serrada ao medir as toras. Somente em poucos casos elaborou-se tabelas de volume para as árvores tropicais, cientificamente (38). Entre os trabalhos de construção de tabelas volumétricas para os trópicos, encontra-se o de Lojân (26), que depois de provar várias fórmulas para estimar o volume das árvores, encontrou a fórmula de Schumacher como a mais satisfatória. Existem tabelas de volume para casca. Hall (18) trabalhando com a espécie "chestnut oak" preparou tabela para a casca em base ao DAP, altura total e tipo de bosque.

De acordo com Beers (3) o método gráfico para a construção de tabelas de volumes é o mais antigo e talvez o mais fácil de empregar, embora seja o menos preciso. Uma grande vantagem no uso das funções matemáticas para a construção de tabelas de volumes está na habilidade de expressar a eficiência e a confiabilidade da relação, já que o desvio padrão dos estimados pode ser prontamente calculado e o coeficiente de correlação pode ser usado para dar uma idéia do grau de associação que existe entre as variáveis (14). Afirma Prodan (33) que a relação que existe entre o diâmetro e a altura das árvores é aleatória, "stochastic", e governada pela teoria da probabilidade.

## 2.6. Algumas fórmulas propostas para a estimação do volume

A seguir apresenta-se algumas fórmulas mais usadas para a estimação do volume das árvores. Estas fórmulas estão agrupadas em Função Polinomial e Função de Potência como segue:

### 2.6.1. Função Polinomial

2.6.1.1. Sem incluir fator mórfico:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_2 H + \beta_{11} D^2 + \beta_{22} H^2 + \beta_{12} DH + \beta_{112} D^2 H + \beta_{122} DH^2 + \beta_{1122} D^2 H^2$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_{11} D^2 + \beta_{12} DH + \beta_2 H + \beta_{112} D^2 H$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_{11} D^2 + \beta_{12} DH + \beta_{112} D^2 H$$

$$V = \beta_0 + \beta_{11} D^2 + \beta_{22} H^2 + \beta_{112} D^2 H + \beta_{122} DH^2$$

$$V = \beta_0 + \beta_{11} D^2 + \beta_{22} H^2 + \beta_{112} D^2 H + \beta_{122} DH^2$$

$$V = \beta_0 + \beta_2 H + \beta_{11} D^2 + \beta_{112} D^2 H$$

$$V = \beta_0 + \beta_2 H + \beta_{11} D^2$$

$$V = \beta_0 + \beta_{11} D^2 + \beta_{112} D^2 H$$

$$V = \beta_0 + \beta_2 H + \beta_{11} D^2$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 D^2 H$$

$$V = \beta_0 D^2 H$$

2.6.1.2. Incluindo fator morfico:

$$V = \beta_0 + \beta_{112} D^2 HF$$

$$V = \beta_0 + \beta_2 F + \beta_{112} D^2 H + \beta_{112} D^2 HF$$



2.6.2. Função de Potência (logarítima)

2.6.2.1. Sem incluir fator mórfico:

$$V = \beta_0 D^{\beta_1}$$

$$V = \beta_0 D^{\beta_1} H^{\beta_2}$$

$$V = \beta_0 (D+1)^{\beta_1} H^{\beta_2}$$

$$V = \beta_0 D^{\beta_1} H^{(\beta_1 - \beta_2)}$$

$$V = \beta_0 (H/D)^{\beta_1} D^{\beta_2} H$$

2.6.2.2. Incluindo fator mórfico:

$$V = \beta_0 D^{\beta_1} H^{\beta_2} D_u^{\beta_3}$$

$$V = \beta_0 (FD^{\beta_2} H)^{\beta_1}$$

2.6.3. Outras Funções

$$V = \frac{D^{\beta_1} H}{\beta_1 + \beta_2 H}$$

$$V = \frac{D^{\beta_1} H}{\beta_1 + \beta_2 D}$$

$$V = \beta_0 \left[ D_1 - D_2 (H/2 - 1) \right]^{\beta_1}$$

### 3. MATERIAIS E MÉTODOS

No presente capítulo apresenta-se várias formas de funções, as quais serão utilizadas com modelos matemáticos para expressar a relação do volume da árvore, como variável dependente da altura e do diâmetro. As leis que regem ditas funções e suas propriedades serão consideradas. Em primeiro lugar apresenta-se os desenvolvimentos teóricos e considerações gerais para cada função em estudo e em segundo lugar o método de estimação de parâmetros utilizados neste estudo. Finalmente a descrição dos dados numéricos que se utilizaram como exemplo de aplicação das fórmulas e tentar com êstes valores a construção das tabelas.

#### 3.1. Lei da relação polinomial entre volume, diâmetro e altura

Enunciado O volume da árvore é função monotonicamente crescente do diâmetro e da altura (27)

Hipotese: 
$$E(V) = R_0 + R_1D + R_2H + R_{11}D^2 + R_{22}H^2 + R_{12}DH + R_{112}D^2H + R_{122}DH^2 + R_{1122}D^2H^2$$

onde:

V = volume comercial da árvore

D = diâmetro do tronco a altura do peito (DAP)

H = altura aproveitável do tronco

$R_0, R_1, R_2 \dots R_{1122}$  = parâmetros da população

Justificação matemática: Seja  $V = f(D, H, \underline{\theta})$  o volume da árvore. Assimindo-se que a função "f" é contínua e diferenciável em uma região R, pode-se desenvolvê-la através da expansão da série de Taylor, ou seja, pode-se apresentar o volume como uma função de n ordem do diâmetro e da altura. Esta justificação se apresenta a continuação.

$$\begin{aligned}
 V = f(D, H, \underline{\theta}) & \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} + \frac{\partial f}{\partial D} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} (D-D^0) + \frac{\partial f}{\partial H} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} (H-H^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial D^2} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} \frac{(D-D^0)^2}{2!} + \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} \frac{(H-H^0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial D \partial H} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} \frac{(D-D^0)(H-H^0)}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial D^2 \partial H} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} \frac{(D-D^0)^2 (H-H^0)}{3!} \\
 & + \frac{\partial^3 f}{\partial D \partial H^2} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} \frac{(D-D^0)(H-H^0)^2}{3!} + \frac{\partial^4 f}{\partial D^2 \partial H^2} \Big|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^0} \frac{(D-D^0)^2 (H-H^0)^2}{4!} + f^5(\underline{\xi})
 \end{aligned}$$

$\underline{\xi} \in R$

onde:

D = valores da variável diâmetro (DAP)

D<sup>0</sup> = valor constante do DAP

H = variável altura

H<sup>0</sup> = valor constante da altura

$\underline{\theta}$  = vetor de parâmetros

$\underline{\theta}^0$  = vetor de constantes

Supondo-se que  $f^5(\underline{\xi})$  ou êrro de truncamento da expansão tende a zero em alguma região R do espaço amostral, então, coletando termo por termo resulta o seguinte polinômio:

$$\begin{aligned}
 V = \alpha_0 + \alpha_1 D + \alpha_2 H + \alpha_{11} D^2 + \alpha_{22} H^2 + \alpha_{12} DH + \alpha_{112} D^2 H + \alpha_{122} DH^2 + \\
 + \alpha_{1122} D^2 H^2
 \end{aligned}$$

onde:

- $R_0$  = constante obtida para  $D = 0$  e  $H = 0$
- $R_1 = \frac{\partial f}{\partial D}$  = taxa de incremento do volume por unidade de aumento do diâmetro, mantendo-se constante a altura.
- $R_2 = \frac{\partial f}{\partial H}$  = taxa de incremento do volume por cada unidade de aumento da altura, mantendo-se constante o diâmetro.
- $R_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial D^2}$  = razão de câmbio de  $R_1$ , ou razão de câmbio do volume por efeito quadrático do diâmetro.
- $R_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial H^2}$  = razão de câmbio de  $R_2$ , ou razão de câmbio do volume por efeito quadrático da altura.
- $R_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial D \partial H}$  = razão de câmbio no volume por efeito simultâneo do diâmetro e da altura.
- $R_{112} = \frac{\partial^3 f}{\partial D^2 \partial H}$  = razão de câmbio do volume por efeito quadrático do diâmetro e efeito linear da altura simultaneamente.
- $R_{122} = \frac{\partial^3 f}{\partial D \partial H^2}$  = razão de câmbio do volume por efeito quadrático da altura e efeito linear do diâmetro simultaneamente.
- $R_{1122} = \frac{\partial^4 f}{\partial D^2 \partial H^2}$  = razão de câmbio do volume por efeito quadrático da altura e do diâmetro simultaneamente.

$e$  = erro ou componente aleatório.

Considerações: De acôrdo com o que afirma Mavrex (27), nesta metodologia p. põe-se eliminar a determinação de "árvores-tipo" mediante o uso direto de uma série de dados tomados sôbre uma amostra representativa da população em estudo. Tais dados são analisados e elaborados por métodos estatísticos correntes, que fazem inecéssário o cálculo de "coeficientes de forma" constante para cada classe diamétrica. Em lugar disso formula-se uma equação que relacione o mais aproximadamente possível as variáveis volume, altura e diâmetro. Para evitar sinuosidades inexplicáveis desde o ponto de vista biológico, o autor plantea uma outra hipótese de que a fórmula do volume a calcular-se não pode acusar potências de diâmetros e de alturas superiores a segunda ordem. Porisso adota o polinômio de segundo grau em cada uma das variáveis consideradas independentes.

3.1.1. Corolário 1. O volume da árvore incrementa de acôrdo com uma relação linear de primeira ordem em duas variáveis.

Hipótese:  $E(V) = R_0 + R_1 D + R_2 H$

Considerações: Esta função constitui um subconjunto da lei mais geral mencionada por Mavrex (27) e apresentada anteriormente. Nesta função os coeficientes têm os mesmos significados da função já explicada mais acima. Nota-se que os têrminos que resultam do polinômio anteriormente tratado vem a constituir o êrro de truncamento dêste modelo. Desde o ponto de vista computacional esta expressão

é bem mais simples que a fórmula planteada como lei geral. Sendo no caso presente o diâmetro linear de primeira ordem, torna-se contraditório como o propôsto anteriormente e também com o que se verifica na prática, já que sabemos que o volume das árvores incrementa com o quadrado, ou aproximadamente com o quadrado do diâmetro.

3.1.2. Corolário 2. O volume da árvore incrementa conforme a uma relação polinomial de segunda ordem em duas variáveis.

Hipótese: 
$$E(V) = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_2 H + \beta_{11} D^2 + \beta_{22} H^2$$

Considerações: Esta função possui os mesmos cinco primeiros termos da fórmula geral, ou seja, é também um subconjunto da fórmula geral. Com relação ao modelo antes considerado parece ser esta mais ventajosa para relacionar as variáveis V, D e H, pois apresenta pelo menos um dos seus termos contendo o diâmetro quadrático. Si bem que o aumento do número de termos em uma equação trás consigo certas desvantagens computacionais, é de se esperar bons resultados na aplicação desta fórmula por ser mais realística que a fórmula linear. Neste subconjunto o erro de truncamento está formado pela série de termos apartir do quinto que resultam ao formar esta função.

3.1.3. Corolário 3. O volume da árvore incrementa conforme a uma relação cúbica mixta das variáveis diâmetro e altura, combinando aparte quadrática na

variável D e linear em H.

Hipótese:  $E(V) = R_0 + R_1 D^2 H$

Considerações: Esta fórmula também constitui um subconjunto da fórmula mais geral. Nota-se que esta expressão é semelhante a uma curva quadrática mixta se considerarmos a combinação  $D^2$  como uma variável transformada e H como uma variável sem transformar.

Esta equação é usada por muitos autores como a fórmula da variável combinada e tida como uma das melhores para construção de tabelas volumétricas. Dentre as fórmulas consideradas para o presente estudo, esta é a mais simples e oferece a grande vantagem de possuir somente dois parâmetros.

3.1.4. Corolário 4. O volume da árvore incrementa conforme a uma relação de segunda ordem do diâmetro e inversa da altura.

Hipótese:  $E(V) = R_0 + R_1 H^{-1} + R_2 D^2$

$$E(V) = R_1 H^{-1} + R_2 D^2$$

Considerações: Nota-se que estas duas expressões podem ser consideradas como um subconjunto ou caso particular da equação mais geral de Mavrex (27) e si se interpretam as inversas das variáveis H como uma simples transformação da variável original H.

É interessante destacar que para valores pequenos de H a contribuição do termo  $R_1 H^{-1}$  pode ser muito importante dependendo do valor

que toma  $\beta_1$  e quiça relega ao segundo plano a importância do diâmetro na participação para definir o volume. Esta situação se inverte quando H e D vão aumentando em valor. Isto é, H torna-se cada vez menos importante e o diâmetro torna-se mais importante para definir o volume.

As equações acima anotadas têm a mesma característica com a única diferença na constante  $\beta_0 \neq 0$  na primeira e  $\beta_0 = 0$  na segunda.

A transformação indicada aqui de função direta e inversa é um procedimento muito corrente em estatística buscando um ajuste melhor.

3.1.5. Corolário 5. O inverso do volume da árvore cresce conforme a uma relação inversa quadrática na variável diâmetro, e inversa cúbica mixtas das variáveis D e H, aparte quadrática na variável D e linear na variável H.

Hipótese: 
$$E(V^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 (D^2)^{-1} + \beta_2 (D^2 H)^{-1}$$

ou

$$E(V^{-1}) = \beta_1 (D^2)^{-1} + \beta_2 (D^2 H)^{-1}$$

Considerações: Nota-se que as expressões podem ser consideradas como um subconjunto ou caso particular da equação mais geral de Havreux (27) e si se interpretam as inversas das variáveis V como uma simples transformação da variável original V, as inversas da variável D quadrática como uma dupla transformação da variável original



D e as inversas das variáveis transformadas  $D^2H$  como uma simples transformação do conjunto de variáveis original  $D^2H$ .

É interessante destacar que para valores pequenos de diâmetro e altura, principalmente do diâmetro, a contribuição dos termos  $\alpha_1(D^2)^{-1}$  e  $\alpha_2(D^2H)^{-1}$  pode ser muito importante dependendo dos valores que tomam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  respectivamente. Esta situação inverte-se quando H e D vão aumentando em valor. Isto é, tanto H como D torna-se cada vez menos importante para definir o inverso do volume.

As equações acima indicadas têm a mesma característica, com a única diferença na constante  $\alpha_0 \neq 0$  na primeira e  $\alpha_0 = 0$  na segunda.

3.1.6. Corolário 6. O inverso do volume da árvore cresce conforme a uma relação inversa da variável cúbica mixta, quadrática em D e linear em H, e uma relação inversa da variável quadrática mixta, linear em D e linear em H.

Hipótese: 
$$E(V^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1(D^2H)^{-1} + \alpha_2(DH)^{-1}$$

ou

$$E(V^{-1}) = \alpha_1(D^2H) + \alpha_2(DH)^{-1}$$

Considerações: Nota-se que estas duas expressões podem ser consideradas como um subconjunto ou caso particular da equação mais geral de Mavrex (27) e si se interpretam as inversas das variáveis V como uma simples transformação de variável original V, as inversas das

variáveis cúbica mixta, sendo quadrático para o diâmetro e linear para a altura como simples transformação de  $(D^2H)$  e as inversas das variáveis quadrática mixta, linear em diâmetro e altura como uma simples transformação de  $(DH)$ .

É interessante anotar que para valores pequenos de diâmetro e altura a contribuição dos termos  $\alpha_1(D^2H)^{-1}$  e  $\alpha_2(DH)^{-1}$  pode ser muito importante dependendo dos valores que tomam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  respectivamente. Como no caso acima referido, a situação inverte-se quando os valores de D e H vão aumentando, isto é, tanto D como H tornam-se cada vez menos importantes para definir o inverso do volume. Estas duas equações aqui tratadas têm a mesma característica com a única diferença na constante  $\alpha_0 \neq 0$  na primeira e  $\alpha_0 = 0$  na segunda.

### 3.2. Função de Cobb-Douglas ou fórmula de Schumacher

Enunciado: O volume de uma árvore é função de potência do diâmetro (DAP) e altura da árvore.

Hipótese:  $\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$

#### Justificação matemática

Para uma interpretação mais fácil da implicação teórica fundamental de fórmula de Schumacher plantea-se o seguinte:

Supõe-se  $V = f(D, \alpha)$ , isto é, que V seja uma função do D e do parâmetro Beta  $\alpha$ . Esta suposição é a mesma baseada na tabela de volumes local. Onde a relação incremento do volume por unidade de

D é proporcional a  $\alpha_1 \frac{V}{D}$ , ou seja,  $\frac{dV}{dD} = \alpha_1 \frac{V}{D}$ . integrando esta equação diferencial, tem-se:

$$\int \frac{dV}{dD} = \int \alpha_1 \frac{V}{D}$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \alpha_1 \frac{dD}{D}$$

$$\log V = \alpha_1 \log D + K$$

onde:  $K = \log \alpha_0 =$  constante de integração, e obtendo-se antilogarí-timo tem-se:

$$V = \alpha_0 D^{\alpha_1}$$

Esta equação expressa a dependência do volume (V) do diâmetro defini-do pela taxa de incremento  $\alpha_1$  ou também chamado elasticidade.

Suponhamos agora que  $V = f(D, H, \underline{R})$ , as mesmas restrições algé-bricas existem quando o volume é função do D, da altura e do parâme-tro vetor  $\underline{R}$ . A curva que descreve a relação volume em D e H se deri-va fixando uma das variáveis, isto é:

$$V = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$$

#### Considerações sôbre a equação de Cobb-Douglas

Os coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são a elasticidade do volume com respeito ao diâmetro e a altura. Se a soma de  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  indica que para uma dada proporção de incremento em D e H resulta em igual porcentagem de incremento no volume. Se  $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$  o volume aumentará por uma menor proporção que o incremento em D e H, e finalmente se  $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$  o volume incrementa em maior porcentagem que D e H.

A interpretação de D com respeito a H, o volume está dado pela razão:

$$\frac{dV/dD}{dV/dH}$$

ou seja

$$\frac{dD}{dH} = - \frac{\beta_2 D}{\beta_1 H}$$

isto indica que se o diâmetro e a altura da árvore crescem em forma proporcional a uma razão constante e sendo a razão  $\frac{\beta_2}{\beta_1}$  existente, então  $\frac{\partial D}{\partial H}$  permanecem invariáveis ainda que os níveis de D e H mudam.

### 3.3. Método de ajustamento das curvas pelos "Mínimos Quadrados"

Na presente seção se descrevem o ajustamento das curvas através da estimação dos parâmetros em modelos lineares e não lineares pelo método de mínimos quadrados.

#### 3.3.1. Método de mínimos quadrados linear

Como uma ilustração consideramos o caso mais simples do modelo de regressão de primeira ordem em duas variáveis que seja linear em relação a seus parâmetros

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$$

os valores dos coeficientes  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e do  $\epsilon$  são desconhecidos. Visto que o erro varia para cada observação da variável Y torna-se difícil determiná-lo exatamente. Para os parâmetros também não podemos precisá-lo sem que se examine tôdas as possíveis ocorrências de Y,  $X_1$  e  $X_2$ , si bem que permanecem constantes. Podemos, entretanto,

estimar os parâmetros através das informações dos dados observados, assim podemos escrever:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

onde  $\hat{Y}$  representa o valor estimado de Y para cada valor dado de  $X_1$  e  $X_2$  quando  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_2$  estão determinados. A equação  $\hat{Y}$  pode então ser usada como uma equação preditiva, onde a substituição de um valor de  $X_1$  e  $X_2$  nos dá a previsão de um valor médio verdadeiro de Y para o correspondente  $X_1$  e  $X_2$ .

Supondo que dispomos de n conjuntos de observações  $(X_{11}, X_{21}, Y_1)$ ,  $(X_{12}, X_{22}, Y_2)$  .....  $(X_{1n}, X_{2n}, Y_n)$ , pode-se escrever

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \epsilon_i$$

O princípio do método de mínimos quadrados consiste em estimar os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  minimizando a soma dos quadrados do erro  $(\sum \epsilon_i^2)$  ou desvios dos valores observados para os correspondentes valores estimados, ou seja,

$$\sum \epsilon_i^2 = \text{mínimo}$$

Da equação  $Y_i$  acima podemos escrever:

$$\epsilon_i = (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i})$$

elevando ao quadrado e somando cada membro desta equação obtemos:

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i})^2$$

Para minimizar o somatório do quadrado do erro  $(\sum \epsilon_i^2)$  é necessário tomar as derivadas parciais com respeito a cada um dos parâmetros

a serem estimados e igualar a zero cada uma delas como segue:

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial \beta_0} = 2 \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i}) (-1) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial \beta_1} = 2 \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i}) (-X_{1i}) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial \beta_2} = 2 \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i}) (-X_{2i}) = 0$$

daí obtemos:

$$\sum \beta_0 + \beta_1 \sum X_{1i} + \beta_2 \sum X_{2i} = \sum Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_{1i} + \beta_1 \sum X_{1i}^2 + \beta_2 \sum X_{1i} X_{2i} = \sum X_{1i} Y_i$$

$$\beta_0 \sum X_{2i} + \beta_1 \sum X_{1i} X_{2i} + \beta_2 \sum X_{2i}^2 = \sum X_{2i} Y_i$$

escrevendo em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} N & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} Y_i \end{bmatrix}$$

resolvendo-a obteremos os valores de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , que minimizam a soma dos quadrados dos desvios.

Generalizando a descrição do método para qualquer número de variáveis controláveis se pode descrever o seguinte modelo:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$

onde:

$\underline{Y}$  = vetor de resposta

$X$  = matriz do desenho ou do modelo

$\underline{\beta}$  = vetor de parâmetros

$\underline{\epsilon}$  = vetor aleatório com  $E(\underline{\epsilon}) = 0$  e com  $\text{Var}(\underline{\epsilon}) = I\sigma^2$

então a superfície das somas de quadrados se pode representar por

$$\underline{\epsilon}'\underline{\epsilon} = (\underline{Y} - X\underline{\beta})' (\underline{Y} - X\underline{\beta})$$

minimizando dita superfície resulta:

$$\frac{\partial \underline{\epsilon}'\underline{\epsilon}}{\partial \underline{\beta}} = X'X\underline{\beta} - X'\underline{Y} = 0$$

$$X'X\underline{\beta} = X'\underline{Y}$$

onde:

$X'X$  = matriz de coeficientes das equações normais

$X'Y$  = matriz das somas de produtos

As equações normais obtidas aqui são as mesmas que se encontrou anteriormente para o caso particular da equação parabólica cuja solução produz o estimado do vetor de parâmetros.

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$$

Este estimado de parâmetros tem a propriedade de ser isegado

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = (X'X)^{-1} X'E(\underline{Y})$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = (X'X)^{-1} (X'X)$$

$$E(\hat{\underline{\beta}}) = \underline{\beta}$$

logo o estimado de  $\underline{\beta}$  é isento de vício. Por outro lado a variância se pode obter na forma usual:

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} X' \text{Var}(Y) X(X'X)^{-1}$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} X' I \sigma^2 X(X'X)^{-1}$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} (X'X) (X'X)^{-1} \sigma^2$$

$$\text{Var}(\underline{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1} \sigma^2$$

Daí o estimado da variância do vetor  $\underline{\hat{\beta}}$  é a matriz da variância-covariância  $(X'X)^{-1} \sigma^2$ , onde  $\sigma^2$  é o quadrado médio do erro. A matriz de variância-covariância do vetor  $\underline{\hat{\beta}}$  é mínima, assim a estimação pelo método de mínimos quadrados é livre de vícios e tem variância mínima.

### 3.3.2. Estimação de parâmetros não-lineares pelo método de mínimos quadrados

Existem vários métodos de estimação não-lineares, mas em nenhum deles os estimadores mantêm exatamente as propriedades vistas anteriormente para os estimadores obtidos pelo método de mínimos quadrados lineares. Entretanto, os estimados obtidos pelo método de mínimos quadrados não-lineares tem a propriedade de ser assintoticamente sem vício e assintoticamente de variância mínima. O único modelo que será descrito nesta seção e que se usará a seguir é o método de linearização de Gauss, que essencialmente consiste em uma expansão da série de Taylor, que por sucessivas iterações vai melhorando os



estimados de parâmetros até haver convergência. O método se descreve a continuação para um caso de três parâmetros não-lineares.

Seja  $\underline{Y} = f(X, \underline{\beta})$  a função a ajustar, onde  $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ . Logo

$$\underline{Y} = f(X, \underline{\beta}) \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} + \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} (\beta_1 - \beta_1^0) + \frac{\partial f}{\partial \beta_2} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} (\beta_2 - \beta_2^0) + \frac{\partial f}{\partial \beta_3} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} (\beta_3 - \beta_3^0) + \epsilon^*$$

$$\text{onde } \underline{\beta}^0 = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \beta_3^0 \end{bmatrix}$$

Seja:

$$\underline{Y}^* = \underline{Y} - f(X, \underline{\beta}) \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_1} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} = \underline{Z}_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_2} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} = \underline{Z}_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_3} \Big|_{\underline{\beta}=\underline{\beta}^0} = \underline{Z}_3$$

$$\beta_1 - \beta_1^0 = \Delta_1$$

$$\beta_2 - \beta_2^0 = \Delta_2$$

$$\beta_3 - \beta_3^0 = \Delta_3$$

por conseguinte a equação transformada se pode escrever

$$\underline{Y}^* = \underline{Z}_1 \Delta_1 + \underline{Z}_2 \Delta_2 + \underline{Z}_3 \Delta_3 + \epsilon^*$$

ou 
$$\underline{Y}^* = \underline{Z} \underline{\Delta} + \epsilon^*$$

onde 
$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix}$$

$\epsilon^*$  = erro de truncamento e erro experimental

A equação  $Y^*$  é essencialmente linear em relação a seus parâmetros, portanto se pode resolver seguindo o método de mínimos quadrados lineares. Portanto:

$$\frac{\partial \epsilon^{*T} \epsilon}{\partial \underline{\Delta}} = \underline{Z}' \underline{Z} \underline{\Delta} - \underline{Z}' \underline{Y}^* = \underline{0}$$

$$\underline{\Delta} = (\underline{Z}' \underline{Z})^{-1} \underline{Z}' \underline{Y}^*$$

que corresponde à solução inicial

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_1^0 \\ \theta_2 - \theta_2^0 \\ \theta_3 - \theta_3^0 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte a primeira aproximação está dada por:

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 + \theta_1^0 \\ \Delta_2 + \theta_2^0 \\ \Delta_3 + \theta_3^0 \end{bmatrix}$$

O próximo passo consiste em substituir os valores iniciais  $R_1^0$ ,  $R_2^0$  e  $R_3^0$  por  $R_1^{(1)}$ ,  $R_2^{(1)}$  e  $R_3^{(1)}$  e se efetua tôdas as operações indicadas anteriormente de novo. O processo termina quando:

$$\begin{bmatrix} R_1^{(i)} \\ R_2^{(i)} \\ R_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{(i+1)} \\ R_2^{(i+1)} \\ R_3^{(i+1)} \end{bmatrix}$$

### 3.4. Descrição dos dados de campo

Os dados obtidos para o presente estudo constaram de diferentes amostras de espécies florestais maderáveis dos bosques da zona tropical. As espécies em estudo foram: espécies de bosques naturais de Costa Rica, espécies de bosques naturais de Panamá, espécies de bosque cultivado de Pinus caribaea e espécie de bosque natural de Alnus jorullensis, H.B.K.

Os bosques tropicais são compostos de associações de plantas, em geral variando bastante sua composição florística dentro de uma mesma localidade. Pode-se considerar que os bosques tropicais estão distribuídos geograficamente na América Central e parte do América do Sul, de uma zona que se estende mais ou menos desde México até o vale do Amazonas. Nos bosques tropicais o volume de madeira está distribuído entre uma grande diversidade de espécies que diferem em suas características anatômicas, suas propriedades mecânicas, seus usos, etc. Segundo Holdridge (20) em Costa Rica existem 1.000 a 1.500

espécies florestais. De acôrdo com Budowski (9) nos bosques tropicais húmidos a composição florística varia muito, mas certas famílias são encontradas mais frequentemente, tais como Leguminosae, Lecythidaceae, Moraceae, Euphorbiaceae, Bignoniaceae, Meliaceae, Bombacaceae, Myristicaceae e Simaroubaceae.

#### 3.4.1. Espécies de Costa Rica

Os dados dos bosques naturais de Costa Rica foram obtidos na fazenda Três X's (XXX) situada entre Turrialba e Siquirres, em uma região premontana de bosque muito húmido, de acôrdo com a classificação de Holdridge (21).

As espécies florestais que constaram das amostras dêste sítio formaram um total de 58 árvores de doze gênero diferentes com predominância da espécie comumente chamada de "Fruta Dorada".

#### 3.4.2. Espécies de Panamá

As amostras dos bosques naturais de Panamá foram provenientes de diferentes zonas e constaram de 41 árvores tôdas elas de diferentes espécies. Êstes dados foram obtidos de fontes secundárias.

#### 3.4.3. Pinus caribaeae

Os dados de pinus foram provenientes de bosques cultivados em Costa Rica e constaram de 70 árvores em total. Êstes dados foram obtidos de fontes secundárias.

O pinus é uma espécie conífera de fôlhas aciculadas. Em

países do hemisfério sul encontra-se vastos cultivos de Pinus caribaea em programas de florestação e reflorestação. Esta espécie foi dividida por Little e Dorman (25) em Pinus elliottii, Engelm., nome dado ao "slash pine" do sudeste dos Estados Unidos, e Pinus caribaea, Morelet, para os pinus de Cuba, Centroamérica e Bahamas.

Posteriormente, com estudos feitos em pinus de Centroamérica levaram os autôres a subdividirem a espécie em três variedades: P. caribaea var. caribaea, de Cuba; P. caribaea var. hondurensis, de Centroamérica e P. caribaea var. bahamensis das ilhas Bahamas.

Conforme descrevem Barret e Colfari (2) a árvore adulta de pinus varia de 8 a 45 metros de altura, com diâmetros até 100 cm. Em sua zona de distribuição as temperaturas médias estão entre 24,5 e 25,5°C e as chuvas entre 1200 a 1600 mm anuais. Está na maioria das vezes associado com a espécie P. tropicalis e cresce preferentemente nos grupos de solos pertencentes aos latossólicos vermelhos e amarelos.

#### 3.4.4. Alnus jorullensis, H.B.K. (Jaúl)

Os dados de Jaúl usados neste trabalho constaram de 30 árvores coletadas em diferentes sítios do Vale Central de Costa Rica, nas cercanias de San José a uma altitude compreendida entre 1500 a 2500 m acima do nível do mar. As temperaturas médias anuais variam entre 15 a 18°C. A precipitação está entre 2000 a 2400 mm anuais.

A seguir apresenta-se os quadros contendo os dados de diâmetro a altura do peito (DAP), altura aproveitável do tronco e o volume

aproveitável da árvore. Todas as medidas são dadas em metros.

QUADRO 1. Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 58 árvores de Costa Rica.

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
1	0,675	15,90	3,652760
2	0,500	20,00	2,372429
3	0,408	11,80	1,079335
4	0,475	21,80	2,709982
5	0,500	22,90	2,822067
6	0,550	9,30	1,677720
7	0,515	22,10	3,328192
8	0,457	22,50	2,582449
9	0,580	22,00	3,652135
10	0,559	15,50	2,575618
11	0,495	14,50	1,241958
12	0,735	21,90	5,475000
13	0,522	18,00	2,311047
14	0,317	17,00	0,917746
15	0,685	10,80	2,872520
16	0,483	10,90	1,182903
17	0,572	16,20	2,809151
18	0,465	18,90	2,243268
19	0,495	21,60	3,059308

(cont.)

(Cont. Quadro 1)

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V <sub>3</sub> (m <sup>3</sup> )
20	0,570	18,90	3,371189
21	0,680	21,70	5,182844
22	0,470	21,60	2,621940
23	0,466	20,30	2,563913
24	0,356	20,30	1,211412
25	0,475	12,20	1,396333
26	0,635	14,50	2,753365
27	0,510	19,70	2,813021
28	0,490	14,30	1,788540
29	0,575	13,30	2,071081
30	0,420	20,30	1,849582
31	0,590	11,70	2,072460
32	0,432	13,50	1,382985
33	0,470	18,00	2,166970
34	0,483	10,80	1,449361
35	0,407	10,80	1,081831
36	0,363	21,60	1,277636
37	0,381	21,60	1,481554
38	0,330	18,00	0,972325
39	0,457	14,50	1,425999

(cont.)

(Cont. Quadro 1)

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
40	0,750	13,80	3,941785
41	0,405	17,10	1,300872
42	0,705	21,60	4,782273
43	0,610	16,80	3,065440
44	0,720	21,90	5,845296
45	0,736	21,50	6,122508
46	0,595	13,70	2,619492
47	0,636	22,50	4,185629
48	0,515	18,00	2,248365
49	0,787	22,50	6,362914
50	0,660	16,20	3,816090
51	0,406	13,40	1,010130
52	0,445	18,50	1,725273
53	0,559	13,50	2,321533
54	0,625	18,00	3,859909
55	0,635	9,00	1,9992200
56	0,508	0,00	1,452740
57	0,445	14,50	1,352241
58	0,660	16,20	3,323805



QUADRO 2. Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 41 árvores de Panamá.

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
1	0,810	20,0	5,575546
2	0,520	13,1	1,544960
3	0,540	14,4	1,958852
4	0,660	14,5	3,021066
5	0,662	11,0	2,152008
6	0,670	13,0	3,029260
7	0,625	10,3	1,825220
8	0,670	6,2	2,467701
9	0,600	20,0	2,963088
10	0,595	8,8	1,563044
11	0,610	15,0	2,709074
12	0,660	10,0	2,189543
13	0,540	15,0	1,992473
14	0,390	14,7	0,878012
15	0,429	16,0	1,254657
16	0,550	14,4	1,847367
17	0,558	6,9	1,000567
18	0,364	9,1	0,472392
19	0,389	11,3	0,647657
20	0,390	11,6	0,678913

(cont.)

(Cont. Quadro 2)

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
21	0,460	17,5	1,454155
22	0,880	26,0	9,187948
23	0,543	24,0	3,502300
24	0,470	19,4	1,852015
25	0,638	20,6	4,015869
26	0,570	10,0	1,658150
27	0,760	22,0	5,443680
28	0,560	18,9	2,428754
29	0,770	24,0	5,579481
30	0,620	17,0	3,438507
31	0,520	19,0	2,420945
32	0,550	14,6	1,907636
33	0,680	14,0	3,050043
34	0,590	13,8	2,149755
35	0,590	16,6	2,495702
36	0,620	14,0	2,324280
37	0,680	18,0	3,594780
38	0,800	17,0	5,763285
39	0,760	24,0	6,532746
40	0,600	20,0	3,392810
41	0,700	20,0	4,617095

QUADRO 3. Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 70 árvores de Pinus caribaea.

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
1	0,238	14,2	0,317316
2	0,238	13,9	0,283259
3	0,267	15,8	0,429416
4	0,222	15,0	0,261487
5	0,273	17,2	0,509512
6	0,252	18,4	0,493020
7	0,221	16,8	0,291320
8	0,171	13,8	0,151251
9	0,224	14,2	0,265445
10	0,184	16,7	0,183452
11	0,204	15,6	0,232674
12	0,280	20,5	0,623003
13	0,263	20,4	0,460478
14	0,219	16,8	0,328380
15	0,186	15,6	0,240842
16	0,198	14,8	0,246155
17	0,234	17,6	0,300564
18	0,296	20,3	0,692137
19	0,252	19,2	0,585231

(cont.)

(Cont. Quadro 3)

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V <sub>3</sub> (m <sup>3</sup> )
20	0,195	18,7	0,330857
21	0,280	16,0	0,549252
22	0,270	16,3	0,355795
23	0,318	16,6	0,592713
24	0,340	20,0	0,788265
25	0,352	18,0	0,746393
26	0,202	12,6	0,193530
27	0,149	13,7	0,093638
28	0,151	13,6	0,126593
29	0,153	11,3	0,105149
30	0,155	15,0	0,155882
31	0,162	16,5	0,148876
32	0,164	10,9	0,108106
33	0,166	14,7	0,166156
34	0,173	16,2	0,180318
35	0,180	15,0	0,186984
36	0,184	16,2	0,184847
37	0,186	15,7	0,222022
38	0,196	17,8	0,245349
39	0,202	13,7	0,183878

(cont.)

(Cont. Quadro 3)

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
40	0,208	17,3	0,220756
41	0,211	14,3	0,242793
42	0,224	13,2	0,239561
43	0,228	15,4	0,306151
44	0,229	17,3	0,273505
45	0,240	16,4	0,373337
46	0,241	14,8	0,285606
47	0,256	15,7	0,376763
48	0,087	11,2	0,034802
49	0,096	9,3	0,041708
50	0,098	11,2	0,047692
51	0,112	9,0	0,040326
52	0,112	10,6	0,047411
53	0,118	10,0	0,051156
54	0,122	8,2	0,054668
55	0,123	13,7	0,092571
56	0,124	16,1	0,109375
57	0,125	10,9	0,056395
58	0,125	8,6	0,053698
59	0,125	12,5	0,067348

(cont.)

(Cont. Quadro 3)

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
60	0,127	12,5	0,075111
61	0,120	13,8	0,092878
62	0,132	12,5	0,083483
63	0,134	12,8	0,091210
64	0,145	12,5	0,093032
65	0,145	13,4	0,114828
66	0,145	14,2	0,119833
67	0,147	10,9	0,078859
68	0,148	9,6	0,083236
69	0,148	14,2	0,136364
70	0,148	15,2	0,146913

QUADRO 4. Diâmetro a altura do peito (DAP), altura (H) e volume (V) de 30 árvores de Alnus jorullensis.

Árvore nº	DAP (m)	H (m)	V (m <sup>3</sup> )
1	0,53	12,0	1,867147
2	0,55	9,0	1,485334
3	0,47	13,0	1,513021
4	0,51	14,0	1,803094
5	0,45	9,0	1,187929
6	0,48	9,0	1,276440
7	0,48	10,0	1,963531
8	0,52	14,0	2,128202
9	0,47	14,0	1,847889
10	0,47	11,5	1,444768
11	0,48	13,0	1,633212
12	0,49	13,5	1,914661
13	0,51	11,0	1,596370
14	0,46	8,0	1,614678
15	0,47	18,0	2,094952
16	0,48	17,0	1,877118
17	0,45	22,0	2,301381
18	0,47	8,5	1,345764

(cont.)

(Cont. Quadro 4)

---

Árvore nº	DAF (m)	H (m)	V <sub>3</sub> (m <sup>3</sup> )
19	0,45	14,6	2,169115
20	0,49	6,0	0,871100
21	0,54	10,0	1,451834
22	0,48	11,0	1,523602
23	0,55	13,0	2,113228
24	0,53	11,0	1,710381
25	0,48	8,0	1,216117
26	0,49	10,0	1,697798
27	0,50	11,0	1,560094
28	0,51	19,0	2,694708
29	0,47	21,0	2,839852
30	0,45	11,0	1,381952

---



### 3.5. Procedimento utilizado neste estudo

No presente capítulo deu-se uma descrição em linhas gerais da forma em que se vai levar a cabo o trabalho. Em primeiro lugar fêz-se referências baixo descrição ampla das diferentes fórmulas que se usaram para estimar volume de árvores. Em segundo lugar de descrever os procedimentos utilizados para estimar os parâmetros que descrevem cada equação volumétrica, isto é, o método de estimação pelo Método de Mínimos Quadrados lineares e não lineares e por último se descreveu o material experimental utilizado para a estimação do volume pelas diferentes fórmulas. Em realidade os dados utilizados servem simplesmente de base para dar uma comparação numérica e não pretende dar a idéia de que os resultados das tabelas de volumes sejam utilizadas com outro propósito.

#### 4. RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se os resultados obtidos no presente estudo. Os resultados estão dados na seguinte sequência: equação de predição do volume como função da altura e do diâmetro para diferentes fórmulas matemáticas; em segundo lugar, apresenta-se o contorno da desviação padrão de cada equação de predição e finalmente como medida de ajuste, as estatísticas F e  $R^2$ . Todas as estimações se levam a cabo com base em quatro tipos de dados provenientes de diferentes sitios e espécies. Também se faz referência às tabelas de volumes construídas, utilizando todas equações e tomando como exemplo os dados de espécies de Costa Rica. Todos os cálculos foram processados mediante um computador eletrônico IBM 1620-40K.

##### 4.1. Equação de predição do volume como função do DAP e da altura comercial

No Quadro 5 se transcreve as equações de ajuste do volume das árvores para os quatro grupos de espécies. A seguir descreve-se cada uma das equações e correspondentes parâmetros estimados.

As fórmulas estão identificadas por meio de um código numérico na seguinte forma:

1. Equação de Schumacher
2. Equação polinomial de 4ª ordem
3. Equação polinomial de 2ª grau

4. Equação polinomial de 1ª ordem
5. Equação da variável combinada
6. Equação de variável inversa com  $\rho_0$ .
7. Equação da variável inversa sem  $\rho_0$ .
8. Equação inversa com variável mixta  $D^2H$  com  $\rho_0$ .
9. Equação inversa com variável mixta  $D^2H$  sem  $\rho_0$ .
10. Equação inversa com variáveis mixtas  $D^2H$  e  $DH$  com  $\rho_0$ .
11. Equação inversa com variáveis mixtas  $D^2H$  e  $DH$  sem  $\rho_0$ .

Na equação de Schumacher, calculados mediante o ajuste pelo método de mínimos quadrados não linear, todos os dados considerados apresentam os coeficientes dentro de uma variação como seria de se esperar. Em todos os casos os expoentes do diâmetro e da altura têm uma certa elasticidade diferencial que oscila ao redor de 2 e de 1, respectivamente. Na espécie Jaúl o expoente do diâmetro é menor que a unidade, talvez pelo fato de que nesta espécie tenha-se usado um número pequeno de dados.

QUADRO 5. Equações de predição do volume para 4 espécies com o número de parâmetros total e ajustados

Form. nº	Espécies de Costa Rica	Nº total parâm.	Nº parâm. ajustados
1	$V = 0,66269D^1,992665H^0,905317$	3	3
2	$V = 0,836169-3,9054D-0,14369H+6,6632D^2+0,00192H^2+$ $+0,5286DH-0,2447D^2H-0,003037DH^2+0,007007D^2H^2$	9	9
3	$V = -1,917949+1,106366D+0,02913H+7,858338D^2+$ $+0,003554H^2$	5	5
4	$V = -5,239508+9,815539D+0,152623H$	3	3
5	$V = 0,191947+0,471938D^2H$	2	2
6	$V = -0,137257+0,182043H^{-1}+9,225136D^2$	3	3
7	$V = -12,37402H^{-1}+11,039418D^2$	2	2
8	$V^{-1} = -0,002769+0,028875(D^2)^{-1}+1,501396(D^2H)^{-1}$	3	3
9	$V^{-1} = 0,01953(D^2)^{-1}+1,645006(D^2H)^{-1}$	2	2
10	$V^{-1} = 0,046309+2,104451(D^2H)^{-1}-0,67827(DH)^{-1}$	3	3
11	$V^{-1} = 2,033518(D^2H)^{-1}-0,20083(DH)^{-1}$	2	2
Espécies de Panamá			
1	$V = 1,069D^2,3966077H^0,764501$	3	3
2	$V = 6,253011-40,943D-0,06833H+59,09D^2-0,013808H^2+$ $+2,15DH-3,2006D^2H+0,4568D^2H^2$	9	8
3	$V = 1,879311-11,91828D-0,002994H+18,41377D^2+$ $+0,004752H^2$	5	5
4	$V = -5,952682+10,334498D+0,165535H$	3	3
5	$V = 0,106568+0,442898D^2H$	2	2
6	$V = 0,596932-21,52546H^{-1}+10,124667D^2$	3	3
7	$V = 17,42929H^{-1}+10,868787D^2$	2	2
8	$V^{-1} = -0,151082+0,072316(D^2)^{-1}+1,936269(D^2H)^{-1}$	3	3
9	$V^{-1} = 0,014568(D^2)^{-1}+2,15861(D^2H)^{-1}$	2	2
10	$V^{-1} = 0,097604+3,828503(D^2H)^{-1}-3,715156(DH)^{-1}$	3	3
11	$V^{-1} = 3,485082(D^2H)^{-1}-2,399197(DH)^{-1}$	2	2

Cont. Quadro 5

Form. nº	Espécies de Pinus	Nº total parâm.	Nº parâm. ajustados
1	$V = 0,21416D^1,832409_H^1,107803$	3	3
2	$V = 0,090749-2,17832D+0,010809H+12,788D^2-$ $-0,001065H^2-0,00761DH-0,48164D^2H+0,0009935DH^2$	9	8
3	$V = 0,239114-0,803666D-0,038404H+7,3089D^2+$ $+0,001898H^2$	5	5
4	$V = -0,386686+2,409174D+0,011357H$	3	3
5	$V = 0,010067+0,35813D^2H$	2	2
6	$V = 0,092061-1,45144H^{-1}+6,261505D^2$	3	3
7	$V = -0,479684H^{-1}+6,771764D^2$	2	2
8	$V^{-1} = 0,596889-0,008469(D^2)^{-1}+2,476998(D^2H)^{-1}$	3	3
9	$V^{-1} = 0,02383(D^2)^{-1}+2,228588(D^2H)^{-1}$	2	2
10	$V^{-1} = 0,990869+1,635732(D^2H)^{-1}+8,59718(DH)^{-1}$	3	3
11	$V^{-1} = 2,044698(D^2H)^{-1}+3,6985(DH)^{-1}$	2	2

Espécies de Jaú

1	$V = 0,4647D^0,736975_H^0,735253$	3	3
2	$V = 5,318797-24,8589D+0,137023H+32,87058D^2+$ $+0,001326H^2-0,29611DH$	9	6
3	$V = -0,502299+0,96013D+0,116318H+1,78446D^2-$ $-0,000601H^2$	5	5
4	$V = -0,88412+2,834957D+0,099548H$	3	3
5	$V = 0,505728+0,202182D^2H$	2	2
6	$V = 3,591248-45,3794H^{-1}-0,029362D^2$	3	3
7	$V = -15,08049H^{-1}+9,67068D^2$	2	2
8	$V^{-1} = 0,552552-0,121175(D^2)^{-1}+3,314584(D^2H)^{-1}$	3	3
9	$V^{-1} = 0,014724(D^2)^{-1}+3,15029(D^2H)^{-1}$	2	2
10	$V^{-1} = 0,031289-2,760568(D^2H)^{-1}+12,62842(DH)^{-1}$	3	3
11	$V^{-1} = -2,9958(D^2H)^{-1}+13,477(DH)^{-1}$	2	2

Quanto ao coeficiente  $\beta_0$ , as variações se verificaram dentro de uma amplitude de 0,2 a 1 aproximadamente para tôdas as espécies. O modelo 2 ou fórmula geral, está formada de nove termos conforme se indica na lei da relação polinomial, enunciada no capítulo anterior. Aqui as equações de predição comportaram-se diferentemente para cada um dos grupos de espécies estudados. O número de termos foi automaticamente suprimido em algumas espécies, permanecendo constante nas espécies de Costa Rica. A eliminação automática das variáveis (sejam originais ou geradas) aí se produzem quando a correlação entre estas e outras ou outras que define a equação aproxima ao valor 1, exatamente quando  $r = .99999$ . A ocorrência disso se verifica devido ao fato de que pode produzir singularidade na matriz de equações normais. Nas espécies de Jaúl foram suprimidos os três últimos termos. Na espécie de Panamá e Pinus foram suprimidos apenas um dos termos. O coeficiente  $\beta_0$  foi em todos os casos positivo. Os demais coeficientes variaram sempre apresentando valores decrescentes quanto mais cresce o número de termos. Conforme observa-se, aparece nos resultados dos coeficientes em tôdas as fórmulas consideradas, os termos da variável D sempre com coeficientes de maior valor absoluto. Isso é porque o volume incrementa mais em função do diâmetro do que em função da altura (27).

O modelo 3 ou polinômio de segunda ordem em diâmetro e altura está formado de cinco termos em que se nota a maior contribuição dos coeficientes associados ao diâmetro, principalmente do diâmetro quadrático. Os coeficientes associados com a altura contribuem

em menor escala para o incremento do volume e conforme vai aumentando a potência das variáveis os coeficientes associados com a altura vão se tornando insignificantes. Tanto os coeficientes do diâmetro como os coeficientes da altura são as vezes positivos outras vezes negativos. Em Pinus e espécies de Costa Rica aparece negativo

Para o modelo 4 ou equação de linear de primeira ordem em diâmetro e altura,  $\beta_0$  aparece sempre negativo enquanto que  $\beta_1$  e  $\beta_2$  expressam-se positivos em todos os casos. Isto é de se esperar devido que esta fórmula descreve uma linha reta e como tal não deve apresentar incrementos negativos e positivos ao mesmo tempo. Como a forma da curva que descreve o volume em função do diâmetro e da altura é curvelinear, esta equação não deverá ajustars-se tão bem como as outras.

Na equação da variável combinada, dentro de todos os casos estudados, os parâmetros apresentam-se bastante uniformes em toda região investigada.

Em todas as equações de predição da variável combinada os parâmetros calculados foram positivos e o coeficiente associado com a variável mixta  $D^2H$  quase não varia para os quatro grupos de espécies estudadas.

Os modelos 6 e 7 diferem quanto a forma da curva, apenas no número de parâmetros em que na primeira apresenta  $\beta_0 \neq 0$  e segunda  $\beta_0 = 0$ , o que equivale a dizer que a função volume não tem existência real para volumes muito pequenos de diâmetro e altura. Estas

equações implicam na transformação da variável  $H$  que passa a forma inversa. Nota-se que tanto para a equação 6 como para a equação 7 o parâmetro associado com  $H^{-1}$  é bastante importante para o incremento do volume e o valor estimado para todos os casos é de sinal negativo. O valor absoluto deste coeficiente é relativamente grande e assim para valores muito pequenos de altura a contribuição do termo será também muito pequena (de valor absoluto grande, porém de sinal negativo) e conforme a altura vai aumentando, também o termo vai contribuir mais para o aumento do volume.

Os modelos 8 e 9 têm a mesma fórmula com diferença no número de parâmetros. Estas fórmulas inversas foram obtidas pela transformação de funções não lineares, em que pela transformação a fórmula linear se pode muito bem aplicar o método de mínimos quadrados lineares para o ajuste da curva, ainda que poderiam ser obtidos diretamente aplicando o método de linearização utilizado para os modelos não lineares. Para o modelo 8 parte-se da função:

$$V = \frac{D^2H}{\beta_0 D^2H + \beta_1 H + \beta_2}$$

e para o modelo 9 parte-se da função:

$$V = \frac{D^2H}{\beta_1 H + \beta_2}$$

Os últimos dois modelos, como se pode observar no Quadro 5, também pertence ao grupo das equações inversas nas variáveis  $V$ ,  $D$  e  $H$  e apresentam as variáveis mixtas  $D^2H$  e  $DH$ . A transformação



das fórmulas não lineares é feita da mesma maneira como na equação acima referida, invertendo-se as variáveis e tornando os parâmetros lineares.

#### 4.2. Contorno do desvio padrão dos modelos matemáticos

No Quadro 6 apresenta-se o desvio padrão da regressão de todos os modelos considerados neste estudo para cada um dos grupos de espécies. O desvio padrão da regressão se calcula do quadrado médio do erro obtido da análise de variância. Esta estatística nos dá uma idéia do desvio dos valores observados dos valores estimados na região investigada.

Cabe mencionar que a fórmula de Schumacher de interesse primordial neste estudo foi ajustada pelo método de Mínimos Quadrados não lineares no procedimento de linearização de Gauss, conforme foi explicado na seção 3.3.2. Esta técnica foi empregada aqui com o fim de fazer comparável diretamente os desvios padrões com aqueles estimados por outras fórmulas que é linear, ainda que esta pode também ser ajustada pelo método de Mínimos Quadrados lineares, fazendo a transformação logarítma.

Conforme se observa no Quadro 6, os desvios padrões para a fórmula de Schumacher foram os mais uniformes, sem muita variação nos quatro grupos estudados. Para as demais fórmulas os desvios foram maiores, como era de se esperar, já que tais fórmulas seguem outras transformações. Os valores dos desvios padrões podem ser comparados

dentro dos grupos de fórmulas polinomiais e como se pode notar-se no Quadro 6, vê-se que a fórmula 2 oferece um maior ajuste a julgar pela menor desviação que apresenta; entretanto isso é de se esperar já que ela envolve um maior número de parâmetros que algumas outras, ainda que contribui pouco para reduzir o desvio padrão, o maior número de parâmetros tem certo pêso para alterar o desvio padrão. Ainda assim deve notar-se que isto não é geral devido a eliminação automática que ocorre na fórmula de estimação (Quadro 5).

Nas fórmulas dentro dêste grupo que estamos considerando, o modelo linear apresenta as maiores desviações, e isto é de se esperar já que esta equação descreve uma linha reta, o que não satisfaz tão bem como o ajustamento por uma curva.

As equações 6 e 7, da variável altura inversa apresenta um desvio padrão maior, porém não podem ser comparáveis diretamente com as anteriores, pois pertencem a outro grupo de fórmulas. Entre estas duas a que apresenta maior número de parâmetros deu menor desviação.

No terceiro grupo de fórmulas, ou seja, naquelas em que tôdas as variáveis são inversas os desvios padrões quase não diferem entre uma e outra fórmula para uma mesma espécie, são bastante semelhantes.

Nota-se que para a mesma forma de equação o desvio padrão tende a diminuir quando aumenta-se o número de parâmetros nas equações.

QUADRO 6. Contorno do desvio padrão dos modelos matemáticos (S), para 11 famílias e 4 grupos de espécies

Fórmula nº	Espécies de Costa Rica	Espécies de Panamá	Pinus	JaúI
1	$V = R_0 D^{R_1} H^{R_2}$			
2	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H + R_{11} D^2 + R_{22} H^2 + R_{12} DH + R_{112} D^2 H^2 + R_{1122} D^2 H^2$	0,2618	0,0332	0,0649
3	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H + R_{11} D^2 + R_{22} H^2$	0,2287	0,0337	0,2853
4	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H$	0,2885	0,0339	0,2174
5	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H$	0,3095	0,0553	0,2095
6	$V = R_0 + R_1 D^2 H$	0,2407	0,0340	0,3279
7	$V = R_0 + R_1 H^{-1} + R_2 D^2$	0,5252	0,0457	0,3060
8	$V = R_1 H^{-1} + R_2 D^2$	0,5505	0,0471	0,4578
9	$V^{-1} = R_0 + R_1 (D^2)^{-1} + R_2 (D^2 H)^{-1}$	0,0598	0,0701	0,1295
10	$V^{-1} = R_1 (D^2)^{-1} + R_2 (D^2 H)^{-1}$	0,0580	0,0949	0,1421
11	$V^{-1} = R_0 + R_1 (D^2 H)^{-1} + R_2 (DH)^{-1}$	0,0600	0,0449	0,1294
12	$V^{-1} = R_1 (D^2)^{-1} + R_2 (DH)^{-1}$	0,0620	0,0568	0,1272

#### 4.3. Confiabilidade do ajuste de curvas de acôrdo com o coeficiente de determinação

Um dos procedimentos usados para cômprovar a confiabilidade do ajuste de uma curva tirado de uma série de dados é fornecido pelo valor de  $R^2$  ou coeficiente de determinação múltiple, ou ainda, "Bondade de Ajuste" (êste último não se deve confundir com bondade de ajuste de  $\chi^2$ ). Por êste valor podemos ter uma idéia da relação com que variam as variáveis em proporção ao êrro, isto é, como é explicada a variação devido à regressão (ajuste) em relação com a variação total.

Na equação de Schumacher, para o coeficiente de determinação não acontece como no caso do desvio padrão em que êste é dado em escala logarítima. Aqui o  $R^2$  pode ser perfeitamente comparável com os demais para as outras equações visto que, por ser um número puro não apresenta o inconveniente da escala logarítima.

A confiabilidade do ajuste pode considerar-se como boa quando o valor de  $R^2$  tende para 1. Quando  $R^2$  tende a zero indica preditividade nula ou nenhum ajustamento.

Como se pode observar no Quadro 7, de uma maneira geral os ajustes de tôdas equações para todos os casos considerados proporcionaram ótimos resultados na região estudada.

Considerando a comparação entre as várias espécies pode-se dizer que sòmente a espécie Jaúl forneceu baixa confiabilidade. Os valôres de  $R^2$  mínimo para as espécies de Costa Rica, de Panamá e espécie de Pinus, foi de 0,91 entre as várias equações empregadas.

QUADRO 7. Confiabilidade do ajuste de curvas de acordo com o coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) para as 11 fórmulas e 4 grupos de espécies.

Fórmula nº	Espécies de Costa Rica	Espécies de Panamá	Pinus	Jaflí
1	$V = R_0 D^{R_1} H^{R_2}$	0,964292	0,980567	0,785760
2	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H + R_{11} D^2 + R_{22} H^2 + R_{12} DH + R_{112} D^2 H + R_{122} DH^2 + R_{1122} D^2 H^2$	0,976078	0,969171	0,639005
3	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H + R_{11} D^2 + R_{22} H^2$	0,951869	0,967379	0,781468
4	$V = R_0 + R_1 D + R_2 H$	0,949676	0,910469	0,780884
5	$V = R_0 + R_1 D^2 H$	0,969722	0,965579	0,443645
6	$V = R_0 + R_1 H^{-1} + R_2 D^2$	0,760319	0,938875	0,532499
7	$V = R_1 H^{-1} + R_2 D^2$	0,965847	0,975932	0,938856
8	$V^{-1} = R_0 + R_1 (D^2)^{-1} + R_2 (D^2 H)^{-1}$	0,953848	0,968908	0,389587
9	$V^{-1} = R_1 (D^2)^{-1} + R_2 (D^2 H)^{-1}$	0,989163	0,986570	0,952637
10	$V^{-1} = R_0 + R_1 (D^2 H)^{-1} + R_2 (DH)^{-1}$	0,953644	0,972592	0,390474
11	$V^{-1} = R_1 (D^2 H)^{-1}$	0,987644	0,988256	0,962068

Nos modelos de variáveis inversas que não apresentam o parâmetro  $R_0$ , teve-se um valor mais alto para o coeficiente de determinação, logicamente, considerando sempre a região estudada.

Nota-se que apesar dos ajustes para a espécie Jaúl serem bastantes baixos, a equação de Schumacher apresentou relativamente o melhor ajuste. A equação da variável combinada e o polinômio de segunda ordem, depois da equação de Schumacher, apresentaram  $R^2$  maiores.

#### 4.4. Razão do quadrado médio devido a regressão e quadrado médio da desviação do modelo (F múltiple)

O valor de F múltiple dado pelo quociente entre o quadrado médio devido a regressão e o quadrado médio do erro, provê o teste de significância da análise de regressão, em outras palavras, provê se existe uma completa relação entre as variáveis diâmetro e altura consideradas independentes e a variável volume a um determinado nível de significância.

Para o presente caso, como se observa no Quadro 8, todos os valores de F múltiple são altamente significativos aos níveis de probabilidade mais comumente usados, com excessão de alguns casos para a espécie Jaúl. O modelo número 10 apresenta os maiores valores de F em quase todos os casos.

QUADRO 8. Razão do quadrado médio devido a regressão e quadrado média da desviação do modelo (F múltiple) para 11 fórmulas consideradas e 4 espécies.

Fórmula nº	Fórmula	Espécies de Costa Rica	Espécies de Panamá	Pinus	Jafú
1	$V = r_0 D^2 H^2$	742,64699	710,66352	1690,34750	49,51351
2	$V = r_0 + r_1 D + r_2 H + r_{11} D^2 + r_{22} H^2 + r_{12} DH + r_{112} D^2 H^2 + r_{122} DH^2 + r_{1122} D^2 H^2$	249,91498	219,56783	278,44008	8,49658
3	$V = r_0 + r_1 D + r_2 H + r_{11} D^2 + r_{22} H^2$	301,24432	461,18412	481,90052	22,34994
4	$V = r_0 + r_1 D + r_2 H$	578,95338	257,76155	340,67040	48,11116
5	$V = r_0 + r_1 D^2 H$	1793,55180	1158,41140	1907,52700	22,32756
6	$V = r_0 + r_1 H^{-1} + r_2 D^2$	87,23566	226,73884	514,55807	15,37696
7	$V = r_1 H^{-1} + r_2 D^2$	791,84339	817,62510	1378,68130	214,96922
8	$V^{-1} = r_0 + r_1 (D^2)^{-1} + r_2 (D^2 H)^{-1}$	568,35239	655,97885	1043,95130	8,61617
9	$V^{-1} = r_1 (D^2)^{-1} + r_2 (D^2 H)^{-1}$	2555,77220	976,59150	2497,67860	281,58758
10	$V^{-1} = r_0 + r_1 (D^2 H)^{-1} + r_2 (DH)^{-1}$	565,73434	1624,69460	1188,75150	8,64837
11	$V^{-1} = r_1 (D^2 H)^{-1} + r_2 (DH)^{-1}$	2238,12340	2156,83070	2861,03150	355,07806

Cabe acrescentar aqui que todos êstes resultados que se interpretam têm validade sòmente para a região estatisticamente estudada da curva de ajuste para os valôres observados de diâmetro, altura e volume. No apêndice apresenta-se os quadros de estimação do volume das árvores que se referem a expectação teórica em zonas de extrapolações de volume, altura e diâmetros observados. Dentro do rango de validade das estatísticas  $F$ ,  $R^2$  e  $s$ , tôdas as curvas ajustaram-se relativamente bem como se pode verificar nos quadros já apresentados. Fora destas zonas ou seja, nas zonas de extrapolações, não se pode garantir a mesma tendência para as diferentes curvas de ajuste. Por certo deverão umas se deslocarem mais que outras à maior ou menor eficiência relativa dos métodos estudados.

#### 4.5. Algumas considerações sôbre as tabelas de volumes

O ajuste das equações conforme a jôgo de dados usados na construção das tabelas volumétricas, conduzem a estimação do volume dentro de uma região determinada que está dada pelos valôres extremos do volume, diâmetro e altura observados.

Afim de uma comparação direta dos valôres estimados para os valôres observados para as diversas fórmulas usadas nêste estudo, considera-se também as regiões de extrapolações dos volumes estimados. Analizando cada uma das fórmulas em que se construiu as tabelas para a espécie de Costa Rica, podemos considerar os seguintes resultados:

As fórmulas de Schumacher e da variável combinada apresentam



volumes estimados bastante próximos dos volumes reais em tôda região do estudo. Estas duas curvas parecem possuir a mesma forma quando se ajustam os valôres de V, H e D. Entretanto, mesmo dentro da região investigada aparecem pequenas diferenças entre estas duas fórmulas. Para as demais fórmulas esta diferença é bastante maior. Comparando-se a fórmula de Schumacher e da variável combinada sômente para a região investigada nota-se que a variável combinada sôbre estima os volumes para as classes diamétricas pequenas em qualquer classe de altura. Para as classes diamétricas maiores pode-se considerar que as duas fórmulas dão valôres iguais.

Quando se considera a zona de extrapolação dos volumes estimados observa-se que a variável combinada dá valôres sôbre estimados na primeira e segunda região inferior, isto é, onde se encontram as classes diamétricas e de altura maiores. Mesmo nas classes diamétricas pequenas, para as classes de altura maiores a variável combinada sôbre estima os volumes. A diferença dos volumes estimados para estas duas fórmulas é relativamente pequeno em comparação com os volumes estimados para as demais fórmulas.

O modelo 3 sôbre estima os valôres na primeira região inferior e segunda região superior. Para diâmetros e alturas muito pequenos aparecem valôres negativos. O modelo 4 apresenta volumes subestimados nas duas regiões superiores e na segunda região inferior, além do mais apresenta valôres negativos para as classes de alturas e diâmetros pequenos como no caso anterior. O modelo 5 sôbre estima no segundo quadrante inferior e nos demais quadrantes apresenta

valôres subestimados. Os modelos 7 e 8 apresentam as mesmas tendências por serem curvas iguais. Estas apresentam volumes subestimados na primeira e segunda região inferior e volumes sôbre estimados na primeira e segunda região superior. O modelo 9 apresenta valôres bastante próximos aos da fórmula de Schumacher na primeira região superior e primeira inferior; na segunda região superior esta fórmula subestima levemente, enquanto que na segunda região inferior subestima com maior desviação. O modelo 10 apresenta valôres comparáveis aos da fórmula de Schumacher somente na primeira região superior e finalmente o modelo 11 fornece volumes subestimados em tôdas as regiões de extrapolação.

## 5. DISCUSSAO

Os resultados apresentados no capítulo anterior mostram propriedades e características sobressalentes acêrca das equações de ajuste estudadas. No capítulo presente discutem-se os aspectos fundamentais que se deve ter em conta para julgar as propriedades das equações de predição do volume a luz dos resultados obtidos. É indubitável que existem vários critérios para julgar as equações, entretanto o critério básico considerado neste trabalho, além dos aspectos teóricos, concerne a considerações práticas tais como: facilidade de ajuste, número de parâmetros que contém a equação, simplicidade ou complexidade da mesma, precisão de ajuste, generalização da equação quanto a aplicação a que se refere, etc.

A facilidade de ajustamento ou trabalho de cômputo que requer a estimação dos parâmetros de uma equação as vêzes pode ser bastante tedioso ainda que dependa de poucos parâmetros. Além disso as equações podem ser não-lineares, e ainda que êste aspecto pode não ser relevante quando se opera com equipamento de computação de alta velocidade, mas sim é muito importante no caso que o trabalho venha ser feito por meio de cálculo mecânico ou de menor velocidade de cômputo.

Os modelos lineares são em geral mais simples de se trabalhar, porém os modelos não-lineares necessitam transformações de suas formas originais para o ajuste pelo método de mínimos quadrados lineares ou podem ser calculados diretamente pelo método de mínimos quadrados não-lineares, por exemplo, se poderia utilizar a linearização

de Gauss, que consiste essencialmente em uma expansão da série de Taylor, que por sucessivas interações chega-se aos valores dos estimados dos parâmetros por convergência assintótica.

Dentro da família de polinômios geradas pela expansão da série de Taylor o número de termos que é formada as equações variam. Ainda que o número de termos que compõe uma equação em geral não concretiza a forma definitiva da função. Pode acontecer, segundo a forma da função que se desenvolve, que o número de termos seja reduzido automaticamente em menos termos simplificando a expressão porque as variáveis (seja originadas ou geradas) que compõe o desenho do modelo não contribuem no ajuste dessa equação por estar altamente correlacionado com alguma outra que poderia explicar seu efeito.

O número de parâmetros que concerne a simplicidade ou complexidade da equação é de relevante interesse, pois a precisão do ajuste da equação pode não ser melhor quando o número de parâmetros seja maior, como acontece com a fórmula da variável combinada que proporciona melhor ajuste relativamente aos dos outros polinômios de maior ordem e de maior número de parâmetros, si bem que é de se esperar que quanto maior o número de termos melhor seja o ajuste.

A precisão do volume estimado pelo ajustamento das diferentes equações é muito alto quando considerado dentro da amplitude do espaço amostral do diâmetro e da altura. O mesmo não significa que isso ocorra quando se considera as regiões fora deste espaço amostral ou regiões de extrapolação dos volumes estimados. Esta particularidade é importante para amostras pequenas donde a amplitude de

variabilidade do volume é relativamente muito estreita e o domínio de variabilidade de diâmetro e da altura é muito pequeno, então se passa o risco de construir tabelas de volumes com pouca informação. Entretanto pode-se ter equações com muita consistência na predição do volume estimado por meio de funções em que se disponha de poucos dados observados.

A função de Cobb-Douglas, mais conhecida na literatura florestal americana como fórmula de Schumacher, tem sua posição destacada por ser relativamente simples e depender de poucos parâmetros fáceis de determinar. Ademais os parâmetros exponenciais do diâmetro e da altura expressam outros contornos das equações, que se chama elasticidade e que pode desenvolver outras interpretações como na possibilidade do uso para estudos de taxa de crescimento dos bosques. Nesta equação os parâmetros são altamente confiáveis, mantendo seus valores flexíveis dentro de uma determinada amplitude de ajuste do volume para qualquer das espécies consideradas. Isso poderia concordar com os trabalhos de Schumacher e Hall (36) que usam a equação de Cobb-Douglas para comparar volume entre espécie e localidades e afirmam ser esta a mais confiável para a elaboração de tabelas de volumes.

Um dos pontos de maior controvérsia no uso de fórmulas para a estimação do volume das árvores, baseia-se na determinação ou não do fator mórfico para incluir nas fórmulas propostas. Na equação de Cobb-Douglas êsse problema fica eliminado visto ser os parâmetros bastante flexíveis para permitirem o ajuste da curva mesmo

sem o contrôlê do fator mórfico, que varia de espécie para espécie.

Dentre a familia de fórmulas polinomiais a equação da variável combinada, assim chamada na literatura florestal, merece considerações destacáveis, por ser simples e apresentar sômente dois parâmetros. Em alguns aspectos esta fórmula se compara perfeitamente com a de Schumacher e quiçá poderia em alguns casos apresentar melhores resultados. Em trabalhos realizados por Golding e Hall (6) e Bonilla (5) destacou-se a fórmula da variável combinada como a mais precisa e a mais simples de usar. Contudo, é importante anotar o fato de que os expoentes das variáveis diâmetro e altura não apresentam a mesma flexibilidade como no caso da equação de Schumacher. Isso seria uma restrição quanto à confiabilidade de ajuste para a equação da variável combinada em que os expoentes de diâmetro e altura já estão fixados em 2 e 1 respectivamente. Por outra parte esta fórmula dispensa a operação com logarítimos para o cálculo de seus parâmetros.

As demais fórmulas estudadas parecem ser mais complicadas quanto ao aspecto prático computacional e possuem em geral um maior número de parâmetros. Quanto ao ajuste, estas equações, em sua maioria, deram bons resultados. Gomes (17) afirma que são notáveis os casos práticos com que se verifica o ajuste das equações algébricas para muitas das espécies, o mais justificável, entretante, antes de aplicá-las às diversas essências florestais, seria proceder um estudo prévio acêrca das relações específicas de todos os coeficientes.

No presente estudo as equações de Schumacher e da variável combinada deu estimados dos volumes bastante reais dentro da magnitude

dos dados estudados. Para as classes diamétricas menores a variável combinada mostrou-se levemente superior e para as classes diamétricas maiores a equação de Schumacher apresentou valores estimados mais reais. Dentro das demais fórmulas o modelo de variáveis inversas ( $D^2H$ ) e (DH) apresentou valores estimados mais ou menos comparáveis com as fórmulas acima referidas. Entretanto para as classes diamétricas e classes de altura grande dito modelo sobre estimou bastante os volumes reais.

Atendendo a tôdas estas considerações anteriores e mais as estimativas  $R^2$ ,  $s$  e  $F$ , pode-se afirmar que a equação de Schumacher é o método de estimação do volume das árvores que "melhor" se ajusta às condições em estudo em comparação com as demais fórmulas aqui usadas. Por outro lado a fórmula da variável combinada mostra ser um competidor quando comparada com esta.

## 6. CONCLUSÕES

1. Para a construção de tabelas volumétricas numa ampla magnitude do diâmetro e da altura a equação de Schumacher e da Variável Combinada oferecem exitosas perspectivas.
2. Para julgar a bondade de ajuste de uma equação deve considerar-se um grande número de fatores, entre os quais os mais importantes constituem a precisão e as limitações práticas.
3. Considerando a precisão da estimação e vantagens de ordem práticas, a equação de Schumacher e Variável Combinada oferece maior garantia como equação de predição do volume.
4. Em geral a equação de Schumacher e da Variável Combinada se competem bem tanto em dados reais como em dados gerados.



7a. RESUMO

A presente investigação teve como objetivos principais comparar a eficiência relativa de vários métodos de estimação do volume das árvores, precisar o limite de validez e confiabilidade dos diferentes métodos empregados e oferecer uma guia prática a ter-se em conta no processo da construção de tabelas de volumes.

Na metodologia do estudo foram considerados os procedimentos matemáticos para as justificações teóricas de algumas funções, tais como: Função Polinomial, Função Exponencial e outras funções. O ajustamento das curvas foi feito pelo método de estimação dos "mínimos quadrados lineares" e "mínimos quadrados não-lineares". Este último foi usado nos casos onde o primeiro não podia oferecer uma estimação do erro comparável com o dado pelo segundo. Como ilustração numérica, para a construção das tabelas de volumes foram usados dados de bosques naturais e cultivados.

Observou-se que os diferentes métodos utilizados para a construção das tabelas de volumes ajustaram-se relativamente bem aos dados empregados e apresentaram estimativas confiáveis dentro da magnitude do espaço amostral de diâmetro e altura investigados. As fórmulas de Schumacher e Variável Combinada deram os melhores ajustamentos, tanto na região estudada, como também fora desta região, isto é, na região de extrapolação dos volumes estimados, a julgar pelas estatísticas  $R^2$ , S e F e outras considerações práticas.

Para julgar a bondade de ajuste das diferentes fórmulas consideradas atenderam-se os critérios teóricos, bem como, aquêles de ordem prática, tais como facilidade de ajuste, número de parâmetros, simplicidade da equação, precisão do ajuste e outras generalidades do uso das equações.

Com base em tôdas estas considerações e principalmente no que se refere a precisão da estimação, as fórmulas de Schumacher e Variável Combinada oferecem maior garantia como equações de predição do volume.

## 7b. RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivos principales comparar la eficiencia relativa de varios métodos de estimación del volumen de los árboles, precisar el límite de validez y confiabilidad de los diferentes métodos empleados y ofrecer una guía práctica que debe tenerse en cuenta en el proceso de la construcción de tablas de volumen.

En la metodología del estudio fueron considerados los procedimientos matemáticos para la justificación teórica de algunas funciones, tales como: Función Polinomial, Función Exponencial y otras funciones. El ajuste de las curvas fue efectuado por el método de estimación de "mínimos cuadrados lineales" y "mínimos cuadrados no-lineales". Este último fue usado en los casos donde el primero no podía ofrecer una estimación del error, comparable con lo dado por el segundo. Como ejemplos numéricos para la construcción de las tablas de volumen fueron usados datos de bosques naturales y cultivados.

Se observó que los diferentes métodos utilizados para la construcción de las tablas de volumen se ajustaron relativamente bien a los datos empleados y presentaron estimaciones confiables dentro del rango del espacio muestral de diámetro y altura investigados. Las fórmulas de Schumacher y la Variable Combinada ofrecieron los mejores ajustes, tanto en la región estudiada como también fuera

de esta región, es decir, en la región de extrapolación de los volúmenes estimados a juzgar por las estadísticas  $R^2$ , S y F, y otras consideraciones prácticas.

Para juzgar la bondad de ajuste de las diferentes fórmulas consideradas, se atendieron los criterios teóricos, así como aquellos de orden práctico, tales como facilidad de ajuste, número de parámetros, simplicidad de la ecuación, precisión del ajuste y otras generalidades del uso de las ecuaciones.

Con base en todas estas consideraciones y principalmente en lo que se refiere a la precisión de la estimación, las fórmulas de Schumacher y la Variable Combinada ofrecen mayor garantía como ecuaciones de predicción del volumen.

### 7c. SUMMARY

The principal objectives of this study were to compare the relative efficiency of various methods for estimating the volume of trees, to determine the limit of validity and reliability of the different methods employed, and to offer a practical guide for use in the construction of volume tables.

The methodology of the study dealt with those mathematical methods to support the development of the functions, such as: Polynomial Function, Exponential Function, and others. The fitting of the curves was made by the well-known method of estimation, the "linear least squares" and "non-linear least squares". This last was used in those cases where the first could not give an estimate of the error term, comparable with those obtained by the second. For the numerical examples used in the construction of the volume tables, data of natural forests and cultivated forests were used.

It was observed that the different methods used for the construction of the volume tables, fitted themselves relatively well to the data employed and presented reliable estimates over the whole range of the sample space of the diameter and height. Schumacher's formulas and the Combined Variables gave the best fitting in the operability region as well as outside this region, i.e, in the region of extrapolation judging the goodness of fit on the basis of the

statistics  $R^2$ , S and F, and other practical considerations.

To determine the efficiency of the fitted equations by formulas, the theoretical criterions were taken into account along with the practical criterions, such as the facility of fitting, the number of parameters, the simplicity of the equation, the accuracy of the fitting, and other generalities concerning the use of the equations.

In view of all the above considerations, and principally as regards the precision of the estimation, Schumacher's formulas and the Combined Variable offer the greatest guarantees as equations for the prediction of volume.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. BAKER, F. S. The construction of taper curves. *Journal of Agricultural Research* 30(7):609-624. 1925.
2. BARRET, W. H. G. e GOLFARI, L. Descripción de dos nuevas variedades del "Pino del Caribe". *Caribbean Forester* 23(2): 59-71. 1962.
3. BEERS, T. W. e GRINGRICH, S. F. Construction of cubic-foot volume tables for red oak in Pennsylvania. *Journal of Forestry* 56(3):210-214. 1958.
4. BEHERE, C. E. Form-class taper curves and volume tables and their application. *Journal of Agricultural Research* 35(8): 673-744. 1927.
5. BONILLA, J. A. Comparações de equações para a construção de tabelas de volume "standard" do "Pinus Marítimo". Tese de Mag. Sc. Piracicaba, Brasil, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 1967. 83 p. (mimeo)
6. BOWER, R. F. The mathematical expression of tree taper in volume tables construction. *Journal of Forestry* 33(4):426-431. 1935.
7. BRUCE, D. The height and diameter basis for volume tables. *Journal of Forestry* 18(5):549-557. 1920.
8. \_\_\_\_\_ e SCHUMACHER, F. X. *Forest mensuration*. 3a ed. New York, McGraw-Hill, 1950. 483 p.
9. BUDOVKI, G. Los bosques de los trópicos húmedos de América. *Turrialba* 16(3):278-285. 1966.
- 10. CHAPMAN, H. H. e MEYER, W. H. *Forest mensuration*. New York, McGraw-Hill, 1949. 522 p.
11. CLAUGHTON-WALLIN, H. The absolute form quotient. *Journal of Forestry* 16(5):523-534. 1918.
12. CUNIA, T. Weight least squares method and construction of volume tables. *Forest Science* 10(2):180-191. 1964.

13. CURRO, P. e GHISI, G. Variation of stem form factor in *Populus* 'L-214'. Publ. Cent. Super., Roma 1968 9(4):291-298. (Original não consultado; compilado em Forestry Abstracts 30(1):123. 1969).
14. FURNIVAL, G. M. An index for comparing equation used in construction volume tables. Forest Science 7(4):337-341. 1961.
15. GEVORHIANT, S. R. e OLSEN, L. P. Composite volume tables for timber and their application in the Lake States. U.D. Department Agriculture. Technical Bulletin nº 1104. 1955.
16. GOLDING, D. L. e HALL, O. F. Test of precision of cubic-foot trees volume tables equations on aspen, jackpine and white spruce. Forestry Chronicle 37(2):123-132.
17. GOMES, A. M. de AZEVEDO. Medição dos arvoresdos. Lisboa, Livraria Sá da Costa, 1957. 47 p.
18. HALL, R. C. Timber estimating in the southern appalachians. Journal of Forestry 15(3):310-321. 1917.
19. HANSEN, T. S. Frustun form factor volume tables for white, norway and jackpines in Minnesota. Journal of Forestry 20(3):431-434. 1920.
20. HOLDRIDGE, L. R. La agricultura y la dasonomía en Costa Rica. Competencia o co-existencia. IICA. Comunicaciones de Turrialba nº 56. 1955. 5 p.
21. \_\_\_\_\_. Life Zone Ecology Tropical Science Center, Costa Rica, 1967. 206 p.
22. HONER, T. G. A new total cubic-foot volume function. Forestry Chronicle 41(4):476-493. 1965.
23. HUSCH, B. Forest mensuration and statistics. New York, Ronald Press, 1963. 474 p.
24. LARSON, P. R. Stem form development of forest trees. Forest Science, Monograph 5, 1963. 42 p.
25. LITTLE, E. L. e DORMAN, K. W. Slash pine (*Pinus elliottii*) its nomenclature and variation. Journal of Forestry 50(12):918-923. 1952.
26. LOJAN, L. Una fórmula para estimar volúmenes en un bosque tropical. Turrialba 16(1):62-72. 1966.



27. MAVREX, V. Metodología para la construcción de tablas de cubicación. Ingeniería Forestal (Argentina) 1(3):9-19. 1969.
28. MEYER, A. Forest mensuration. Pennsylvania, Penns Valley Publishers, 1953. 375 p.
29. MEYER, W. H. A method of volume diameter ratios for board foot volume tables. Journal of Forestry 42(3):185-189.
30. MUNGER, T. T. The problem of making volume tables for use on the national forests. Journal of Forestry 15(5):574-586. 1917.
31. PARDE, J. Dendrométrie. Nancy, L'école Nationale des Eaux et Forêts, 1961. 350 p.
32. PENVENTOM, J. E. The relation of bark to diameter and volume in red wood. Journal of Forestry 22(1):44-48.
33. PRODAN, M. Forest biometrics. Oxford, Pergamon Press, 1968. 447 p.
34. RANDIAL, B. S. Graphic determination of cubic volume of a felled tree. Journal of Forestry 56(3):210-214. 1958.
35. SANDRASEGARAN, K. A general volume table for Pinus caribaea Mor. Malayan Forester 31(1):20. 1968.
36. SCHUMACHER, F. X. e HALL, F. Logarithmic expression of timber-tree volume. Journal of Agricultural Research 47(9):719-734. 1933.
37. SPURR, S. H. Forest inventory. New York, Ronald Press, 1952. 476 p.
38. VEILLON, J. P. Tablas de cubicación para árboles en pie en dos tipos de bosques venezolanos. Revista de la Facultad de Ciencias Forestales (Venezuela) 3(12):1-17. 1950.
39. VINCENT, A. J. A commercial general volume table for Shorea leprosula mig. (Meranti tambaga). Malayan Forester 24(1):50-65. 1961.
40. WICKENDEN, H. R. The jonsen absolute form quotient: how it is used in timber estimating. Journal of Forestry 19(6):584-593. 1921.

A P Ê N D I C E



QUADRO Nº 10 ESTIMACÃO DO VOLUME DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO D.A.P. E ALTURA PELA FÓRMULA: 2

Table with columns for diameter at breast height (D.A.P.) and tree height (ALTURA), containing volume estimates for various tree species. The table is organized into a grid with D.A.P. values on the left and height values on the top, with corresponding volume values in the cells.

QUADRO Nº 11 ESTIMAÇÃO DO VOLUME DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO D.A.P. E ALTURA PELA FÓRMULA 3

Table with columns for diameter (DIÂMETRO) and height (ALTURA) and rows for volume (VOLUME). The table contains a grid of numerical values representing volume estimates for various diameter and height combinations.

Table with columns for tree diameter (D.A.P. in meters) from 0.05 to 0.55 and tree height (ALTURA in meters) from 2.50 to 27.00. Each cell contains a numerical value representing the volume estimation.

QUADRO Nº13 ESTIMAÇÃO DO VOLUME DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO D.A.P. E ALTURA PELA FÓRMULA: 5

10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	505	510	515	520	525	530	535	540	545	550	555	560	565	570	575	580	585	590	595	600	605	610	615	620	625	630	635	640	645	650	655	660	665	670	675	680	685	690	695	700	705	710	715	720	725	730	735	740	745	750	755	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835	840	845	850	855	860	865	870	875	880	885	890	895	900	905	910	915	920	925	930	935	940	945	950	955	960	965	970	975	980	985	990	995	1000
214	219	224	229	234	239	244	249	254	259	264	269	274	279	284	289	294	299	304	309	314	319	324	329	334	339	344	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	399	404	409	414	419	424	429	434	439	444	449	454	459	464	469	474	479	484	489	494	499	504	509	514	519	524	529	534	539	544	549	554	559	564	569	574	579	584	589	594	599	604	609	614	619	624	629	634	639	644	649	654	659	664	669	674	679	684	689	694	699	704	709	714	719	724	729	734	739	744	749	754	759	764	769	774	779	784	789	794	799	804	809	814	819	824	829	834	839	844	849	854	859	864	869	874	879	884	889	894	899	904	909	914	919	924	929	934	939	944	949	954	959	964	969	974	979	984	989	994	999	1000																																								





QUADRO Nº 15 ESTIMACÃO DO VOLUME DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO D.A.P. E ALTURA PELA FÓRMULA: 8

Altura (m)	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05	2,10	2,15	2,20	2,25	2,30	2,35	2,40	2,45	2,50		
1,45	4,500	4,590	4,680	4,770	4,860	4,950	5,040	5,130	5,220	5,310	5,400	5,490	5,580	5,670	5,760	5,850	5,940	6,030	6,120	6,210	6,300	6,390	6,480	
1,50	4,590	4,724	4,858	4,992	5,126	5,260	5,394	5,528	5,662	5,796	5,930	6,064	6,198	6,332	6,466	6,600	6,734	6,868	7,002	7,136	7,270	7,404	7,538	7,672
1,55	4,680	4,934	5,188	5,442	5,696	5,950	6,204	6,458	6,712	6,966	7,220	7,474	7,728	7,982	8,236	8,490	8,744	9,000	9,254	9,508	9,762	10,016	10,270	10,524
1,60	4,770	5,134	5,498	5,862	6,226	6,590	6,954	7,318	7,682	8,046	8,410	8,774	9,138	9,502	9,866	10,230	10,594	10,958	11,322	11,686	12,050	12,414	12,778	13,142
1,65	4,860	5,334	5,808	6,282	6,756	7,230	7,704	8,178	8,652	9,126	9,600	10,074	10,548	11,022	11,496	11,970	12,444	12,918	13,392	13,866	14,340	14,814	15,288	15,762
1,70	4,950	5,534	6,118	6,702	7,286	7,870	8,454	9,038	9,622	10,206	10,790	11,374	11,958	12,542	13,126	13,710	14,294	14,878	15,462	16,046	16,630	17,214	17,798	18,382
1,75	5,040	5,714	6,408	7,102	7,796	8,490	9,184	9,878	10,572	11,266	11,960	12,654	13,348	14,042	14,736	15,430	16,124	16,818	17,512	18,206	18,900	19,594	20,288	20,982
1,80	5,130	5,894	6,678	7,462	8,246	9,030	9,814	10,598	11,382	12,166	12,950	13,734	14,518	15,302	16,086	16,870	17,654	18,438	19,222	20,006	20,790	21,574	22,358	23,142
1,85	5,220	6,054	6,948	7,842	8,736	9,630	10,524	11,418	12,312	13,206	14,100	14,994	15,888	16,782	17,676	18,570	19,464	20,358	21,252	22,146	23,040	23,934	24,828	25,722
1,90	5,310	6,204	7,198	8,192	9,186	10,180	11,174	12,168	13,162	14,156	15,150	16,144	17,138	18,132	19,126	20,120	21,114	22,108	23,102	24,096	25,090	26,084	27,078	28,072
1,95	5,400	6,394	7,488	8,582	9,676	10,770	11,864	12,958	14,052	15,146	16,240	17,334	18,428	19,522	20,616	21,710	22,804	23,898	24,892	25,886	26,880	27,874	28,868	29,862
2,00	5,490	6,534	7,678	8,822	9,966	11,110	12,254	13,398	14,542	15,686	16,830	17,974	19,118	20,262	21,406	22,550	23,694	24,838	25,982	27,026	28,170	29,314	30,458	31,602
2,05	5,580	6,674	7,868	9,062	10,256	11,450	12,644	13,838	15,032	16,226	17,420	18,614	19,808	21,002	22,196	23,390	24,584	25,778	26,972	28,166	29,360	30,554	31,748	32,942
2,10	5,670	6,814	8,058	9,302	10,546	11,790	13,034	14,278	15,522	16,766	18,010	19,254	20,498	21,742	22,986	24,230	25,474	26,718	27,962	29,206	30,450	31,694	32,938	34,182
2,15	5,760	6,954	8,248	9,542	10,836	12,130	13,424	14,718	16,012	17,306	18,600	19,894	21,188	22,482	23,776	25,070	26,364	27,658	28,952	30,246	31,540	32,834	34,128	35,422
2,20	5,850	7,094	8,438	9,782	11,126	12,470	13,814	15,158	16,502	17,846	19,190	20,534	21,878	23,222	24,566	25,910	27,254	28,598	29,942	31,286	32,630	33,974	35,318	36,662
2,25	5,940	7,234	8,628	10,022	11,416	12,810	14,204	15,598	17,000	18,400	19,800	21,200	22,600	24,000	25,400	26,800	28,200	29,600	31,000	32,400	33,800	35,200	36,600	38,000
2,30	6,030	7,374	8,818	10,262	11,706	13,150	14,594	16,038	17,482	18,926	20,370	21,814	23,258	24,702	26,146	27,590	29,034	30,478	31,922	33,366	34,810	36,254	37,698	39,142
2,35	6,120	7,514	9,008	10,502	11,996	13,490	14,984	16,478	17,972	19,466	20,960	22,454	23,948	25,442	26,936	28,430	29,924	31,418	32,912	34,406	35,900	37,394	38,888	40,382
2,40	6,210	7,654	9,198	10,692	12,190	13,684	15,178	16,672	18,166	19,660	21,154	22,648	24,142	25,636	27,130	28,624	30,118	31,612	33,106	34,600	36,094	37,588	39,082	40,576
2,45	6,300	7,794	9,388	10,882	12,384	13,878	15,372	16,866	18,360	19,854	21,348	22,842	24,336	25,830	27,324	28,818	30,312	31,806	33,300	34,794	36,288	37,782	39,276	40,770
2,50	6,390	7,934	9,578	11,072	12,578	14,072	15,566	17,060	18,554	20,048	21,542	23,036	24,530	26,024	27,518	29,012	30,506	32,000	33,494	34,988	36,482	37,976	39,470	40,964

DIÁMETRO DEL TAPÓN EN CENTÍMETROS

10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200																																																													
0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00

QUADRO Nº 17 ESTIMACÃO DO VOLUME DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO D.A.P. E ALTURA PELA FÓRMULA: 10

Table with columns for diameter (D.A.P.) and height (ALTURA) and a grid of volume values. The diameter column ranges from 0.05 to 1.35, and the height column ranges from 1.00 to 1.50. Each cell contains a numerical value representing the estimated volume.

QUADRO Nº 18 ESTIMACÃO DO VOLUME DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO D.A.P. E ALTURA PELA FÓRMULA Nº 1

Table with columns for tree height (ALTIMETRIA METROS) and diameter at breast height (DIA. DO TRONCO CM) and rows of volume data. The table is organized into a grid where the vertical axis represents tree height in meters (from 2.50 to 25.00) and the horizontal axis represents diameter at breast height in centimeters (from 31 to 100). Each cell in the grid contains a numerical value representing the estimated volume of the tree.

QUADRO N°19 ESTIMAÇÃO DO VOLUME DA ARVORE EM FUNÇÃO DO D.A.F. E ALTURA PELA FORMULA: 6

V = β₀ + β₁H + β₂D²

Table with columns 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240, 250. Each cell contains numerical values representing volume estimates.